TD de mathématiques n°20 : Convexité

Pour commencer

Exercice 1 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b}{2}$.

Exercice 2 Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}, 1+x\leq e^x\leq 1+xe^x$.

Exercice 3 Montrer que la fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{x-1}{x}\leq \ln(x)\leq x-1$.

Exercice 4 Étudier les fonctions suivantes (dont leur convexité) et tracer l'allure de leur graphe :

(a) $f(x)=e^x+e^{-x}$

(b) $f(x)=\ln(1+x^2)$

(c) $f(x)=\dfrac{2\ln(x)+3}{x}$

(d) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

(e) $f(x)=\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)+2x-3$

(f) $f(x)=-x^2+3x-\ln(x)$

Exercice 5 Montrer que la fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire que pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$ (inégalité de la moyenne arithmético-géométrique).

Exercice 6 En utilisant la convexité d'une fonction bien choisie, démontrer les inégalités suivantes.

(a) $\forall x\in\mathbb{R}_+, e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

(b) $\forall x\in\mathbb{R}_+, e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.

(c) $\forall x\in\mathbb{R}_+, \ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 7 Montrer que la fonction définie sur $I=]1,+\infty[$ par $f(x)=-\ln(\ln x)$ est convexe sur I.

En déduire que pour tous $x,y\in]1,+\infty[$, on a l'inégalité $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\sqrt{\ln x\ln y}$.

Exercice 8 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

Déterminer les points d'inflexions à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 9 Pour tout $x\in]0,1[$, on pose $f(x)=\frac{1}{\ln x}$. Montrer que f possède un unique point d'inflexion dans l'intervalle] 0,1 [et déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en ce point.

Exercice 10 Étudier la convexité de la fonction $x\longmapsto\sqrt{xe^x}$.

Exercice 11 Montrer que la courbe représentative de la fonction $x\longmapsto e^{(x-1)x^{-2}}$ présente 3 points d'inflexion.