

Programme de colle n° 27 : Espaces probabilisés.

Semaine du lundi 19 mai.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Ensembles dénombrables, dénombrabilité

27.1 Notion d'ensemble dénombrable. Famille dénombrable de parties d'un ensemble. Réunions et intersections dénombrables. Lois de De Morgan et distributivités.

Espaces probabilisés

27.2 Notion de tribu sur un ensemble Ω . Si \mathcal{A} est une tribu sur un ensemble Ω , alors $\emptyset \in \mathcal{A}$, et \mathcal{A} est stable par intersection dénombrable ainsi que par intersection et réunion finie.

27.3 Notion d'espace probabilisable. Événements d'un espace probabilisable. Événements incompatibles, familles d'événements deux à deux incompatibles, événement contraire d'un événement.

27.4 Notion de probabilité sur un espace probabilisable. Notion d'espace probabilisé. Probabilité d'un événement d'un espace probabilisé.

27.5 Propriétés vérifiées par toute probabilité d'un espace probabilisé (proposition 19). Inégalités de Boole (version infinie admise).

27.6 Événements presque-sûrs et négligeables. Famille d'événements mutuellement indépendants. Stabilité par passage au complémentaire de l'indépendance mutuelle.

27.7 Exemple type résumant des techniques usuelles : dans le cadre d'une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée à pile ou face, modélisation du problème, probabilité d'avoir le premier pile au n -ième lancer, de n'obtenir que des piles lors des n premiers lancers, puis probabilité de ne faire que des piles.

Probabilités conditionnelles et limite monotone

27.8 Méthodes pour montrer qu'une réunion dénombrable est quasi-certaine, pour montrer qu'une intersection dénombrable est quasi-impossible.

27.9 Familles d'événements croissante ou décroissante pour l'inclusion. Propriété de la limite monotone en probabilités. Probabilité d'une réunion ou d'une intersection dénombrable.

27.10 Probabilités conditionnelles, probabilités composées et formule de Bayes.

27.11 Système complet d'événements. Formule des probabilités totales. Éventuelle gestion d'un événement négligeable lors de l'utilisation d'une formule des probabilités totales que l'on souhaite conditionner (exemple 36). Notion (HP?) de système quasi-complet d'événement.

27.12 Formule de Bayes : version avec les probabilités totales. Caractérisation de l'indépendance avec les probabilités conditionnelles.

Python

27.13 Le cours de statistiques descriptives univariées au complet est au programme de colle de cette semaine (intégralité du contenu mathématique du TP 10).

27.14 Statistiques discrètes univariées en Python : dépouillement d'une série statistique brute, calcul des effectifs cumulés et des fréquences cumulées à partir d'une série statistique brute, commandes `np.unique`, `np.cumsum`. Diagrammes en bâtons. Histogramme normalisé avec regroupement en classes. Diagramme des fréquences cumulées, avec et sans regroupement en classes.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion de tribu sur un ensemble. Énoncer et démontrer la proposition (13) donnant les propriétés vérifiées par toute tribu sur un ensemble.
2. Définir la notion d'espace probabilisable. Définir la notion d'espace probabilisé. Énoncer et démontrer l'inégalité de

La construction de tribus n'est pas exigible.

Ces méthodes doivent être connues.

(HP en 1A)

Boole (prop. 20) (pour la démonstration, cas fini uniquement).

3. Énoncer la proposition 19, donnant les propriétés vérifiées par tout espace probabilisé. Démontrer quelques-uns de ces points, au choix de l'interrogation.
4. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer indéfiniment une pièce équilibrée à pile ou face. Modéliser le problème, et montrer que l'événement "ne jamais faire pile" est négligeable.
5. On considère une suite infinie de lancers d'un dé équilibré. Montrer que l'événement "obtenir au moins une fois 1" est quasi-certain.
6. Définir la notion de famille croissante d'événements. Énoncer la propriété de la limite monotone. Démontrer le cas des réunions croissantes. On pourra passer la démonstration des égalités ensemblistes faisant intervenir une réunion, que l'on expliquera sur un dessin.
7. Définir la notion de système complet d'événements. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.
8. Définir la notion de probabilité conditionnelle. Montrer que \mathbb{P}_A est une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) , pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et pour tout événement A de probabilité non nulle.
9. Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées.
10. Écrire un code Python permettant, étant donné une série statistique brute L supposée définie au préalable, de définir les modalités, les effectifs, les fréquences, les effectifs cumulés et les fréquences cumulées de cette série statistique. On rappellera la définition de certaines de ces notions (au choix de l'interrogation).
11. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def Regroupe(L, Y)` : prenant en entrée une série statistique brute L et les extrémités d'un regroupement en classes présentées sous forme d'une liste Y , et renvoyant en sortie le couple N, F formé par la liste N des effectifs de ces classes, et la liste F de leurs fréquences.