Programme de colle n° 28 : Convexité (chapitre complet). Variables aléatoires discrètes (début).

Semaine du lundi 26 mai.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Convexité

28.1 Position relative de deux courbes (rappel). Notion de fonction concave, convexe. Interprétation de $tx + (1-t)y$ où x et y sont des réels fixés, et où t parcourt $[0, 1]$. Soit I un intervalle, une fonction f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I . Les fonctions affines sont convexes et concaves.

28.2 Convexité des fonctions dérivables : une fonction f dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si f' est croissante, si et seulement si la courbe de f est au dessus de toutes ses tangentes sur I (et énoncé similaire pour la concavité).

28.3 Les inégalités classiques $e^x \geq x + 1$ et $\ln(x) \leq x - 1$ sont des inégalités de convexité.

28.4 Convexité des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$: une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ est convexe sur un intervalle I si et seulement si f'' est positive sur I (énoncé similaire pour la concavité).

28.5 Notion de point d'inflexion. Points d'inflexions des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

28.6 Convexité et recherche d'extrema : soit f une fonction convexe et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I . Alors, tout point critique de f est un minimum global de f sur I . Énoncé similaire pour les fonctions concaves.

Variables aléatoires discrètes

28.7 Notion de variable aléatoire sur un espace probabilisé. Support d'une variable aléatoire. Événements associés à une variable aléatoire.

28.8 Notion de variable aléatoire discrète finie ou infinie.

Python

28.9 Statistiques descriptives univariées : revu du cours, recherche des indicateurs de position et de dispersion en Python (sans utiliser les commandes au programme), commandes `boxplot`, `min`, `max`, `mean`, `median`, `var`, `std` de `numpy`.

L'hypothèse porte sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, conformément au programme...

Hypothèse $\mathcal{C}^2$ conformément au programme...

On pourra poser dès cette semaine des exercices de probabilités (proches du programme précédent) dans lesquels des variables aléatoires sont utilisées pour définir des événements.

Quelques questions de cours

- Définir les notions de fonction convexe et de fonction concave. Montrer (méthode au choix) que le logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que : $\forall x \in [1, e], \ln(x) \geq \frac{x-1}{e-1}$.
- Énoncer la proposition caractérisant les fonctions dérivables convexes (resp. concaves) sur un intervalle. Énoncer le théorème des accroissements finis. Montrer l'implication démontrée dans le cours (de l'énoncé sur la convexité).
- Montrer que : $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.
- Énoncer la définition portant sur la notion de point d'inflexion, puis la proposition caractérisant les points d'inflexions des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Déterminer les points d'inflexions de $x \mapsto x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.
- Énoncer les propositions relatives aux points critiques des fonctions convexes ou concaves et de classe $\mathcal{C}^2$, et démontrer ces propositions.
- Définir la notion de variable aléatoire réelle. Énoncer la proposition relative aux événements associés à une variable aléatoire réelle, et démontrer les trois premiers points.
- Définir les notions de modes, de moyenne empirique, de variance empirique d'une série statistique (quantitative discrète). Énoncer la formule de Koenig-Huygens. Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée une série statistique brute, et renvoyant en sortie la liste de ses modes (seule commande de statistiques autorisée pour ce code: `np.unique`).
- Définir la notion de fonction de répartition d'une série statistique (quantitative discrète). Tracer l'allure type d'une telle fonction de répartition, et expliquer les caractères suivants observables sur ce graphique : les discontinuités, le

caractère "constant par morceaux", les valeurs prises, la valeur des "sauts" aux points de discontinuités, la continuité à droite de ces fonctions. Aucune preuve formelle n'est attendue spontanément, mais l'interrogation pourra, en guise de premier exercice, guider la preuve d'un de ces points.