Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°2- Partie II : Fonctions usuelles

2023-2024
Mathématiques

Pour commencer

Valeur absolue

Exercice 1 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $|x-2|=1$

(b) $\left|x^2-1\right|=x+5$

(c) $\left|2x^2+x-1\right|=3-x$

(d) $|x-2|\leq x$

(e) $\left|x^2+x-2\right|\geq x$

(f) $\left|x^2-3x+2\right|\leq|x-2|$

Exercice 2 Tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes :

(a) $x\longmapsto|x+2|$

(b) $x\longmapsto\left|x^2-x-2\right|$

(c) $x\longmapsto|\ln x|$

Exercice 3 On considère la fonction f définie par la formule $f(x)=\left|x-\frac{1}{x}\right|$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et étudier ses propriétés de symétrie.

(b) Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.

(c) Étudier les variations de f sur son domaine.

(d) Résoudre les équations $f(x)=0$ et $f(x)=2$, d'inconnue $x\in\mathcal{D}_f$.

Exercice 4 Soit $x\in[-1,1]$ et $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\frac{x^n}{n^\alpha}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée en montrant :

$$\exists M\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}^*,|u_n|\leq M.$$

Partie entière

Exercice 5 Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\forall p\in\mathbb{Z},\lfloor x+p\rfloor=\lfloor x\rfloor+p$.

Exercice 6 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.

Exercice 7 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $\lfloor 2x\rfloor=1$

(b) $\lfloor 3x+1\rfloor=2$

(c) $\left\lfloor x^2+1\right\rfloor=2$

(d) $\lfloor 2x-1\rfloor\geq 2$

(e) $\left\lfloor x^2-4\right\rfloor<5$

(f) $\lfloor 4x(1-x)\rfloor>0$

Exercice 8 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=x-\lfloor x\rfloor$ (on dit que F est la fonction partie fractionnaire).

(a) Montrer que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R},F(x+1)=F(x)$.

(c) Tracer la représentation graphique de la fonction F sur l'intervalle $[0,1[$.

(d) En déduire la représentation graphique de la fonction F sur l'intervalle $[-5,5]$.

Puissances généralisées

Exercice 9 Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$.

Exercice 10 On considère la fonction f définie par $f(x)=(1+x)^x$.

(a) Rappeler la définition de la quantité $(1+x)^x$ et en déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$. En déduire le meilleur minorant possible de f sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 11 Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^{\ln x}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 12 Étudier les variations de la fonction définie par la formule $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ sur son domaine de définition et en déduire qu'il s'agit d'une fonction bornée. En déduire la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = (x+1)^\alpha - x^\alpha$.

Étudier le signe et les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour continuer

Valeur absolue

Exercice 14 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $|3-x| = x-1$

(b) $|x+1| = |2x-1|$

(c) $|2x+1| = 1-x$

(d) $\left|3-x^2\right| = 1$

(e) $\left|1-x^2\right| = |x+1|$

(f) $|2x-3| \geq 1$

(g) $|x+3| > |3x+1|$

(h) $|3x+1| \leq 4$

(i) $|x-1| \geq |x+1|$

(j) $\left|1-x^2\right| \leq 2x$

Exercice 15 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $|x| \leq |x-y| + |y|$ et $|y| \leq |x-y| + |x|$.

(b) En déduire que $|x-y| \geq ||x| - |y||$ (seconde inégalité triangulaire).

Exercice 16 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{-|x|}$.

(a) Étudier les propriétés de symétrie de f.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.

(c) En déduire le signe et les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis tracer sa courbe représentative.

Exercice 17 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = |x-2| + |x| + |x+2|$.

En distinguant des cas de manière appropriée, exprimer la fonction f sans utiliser de valeur absolue.

Tracer ensuite soigneusement la représentation graphique de la fonction f.

Résoudre enfin les équations $f(x) = -2$ et $f(x) = 6$ ainsi que les inéquations $f(x) < 5$ et $6 \leq f(x) < 8$.

Exercice 18 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x-a| - |x-b|.$$

Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ (déterminer le meilleur minorant et le meilleur majorant).

Exercice 19 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x-a| + |x-b|.$$

(a) En distinguant trois cas appropriés, donner une expression de $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.

(b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe représentative de f.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, |x-a| + |x-b| \geq b-a$.

Partie entière

Exercice 20 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 21 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $\lfloor 1-x^2 \rfloor = 0$

(b) $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$

(c) $\lfloor 1-2x \rfloor = -3$

(d) $\lfloor x^2+2x-3 \rfloor = 0$

(e) $\lfloor x \rfloor = x$

(f) $\lfloor -x \rfloor < 1$

(g) $\lfloor 2-x \rfloor \leq 1$

(h) $\lfloor x^2+x-1 \rfloor > 0$

(i) $2\lfloor x+1 \rfloor \leq 3$

(j) $4\lfloor x^2+x \rfloor \leq 5$

Exercice 22 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)(1 - x + \lfloor x \rfloor)$.

(a) Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) Étudier les éventuelles propriétés de symétrie de f. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$. En déduire le tracé complet de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-5, 5]$.

Puissances généralisées

Exercice 23 Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^{x^2}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 24 Étudier les variations de la fonction $f(x) = (x^x)^2$ sur son ensemble de définition.

Exercice 25 On souhaite déterminer, s'il en existe, les valeurs $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $a < b$ telles que $a^b = b^a$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(a) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a^b = b^a \iff f(a) = f(b)$.

(b) (i) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Dresser également le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < b$. À l'aide de la question (b), montrer que $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = 2$.

(d) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}, 2^n > n^2$.

(e) Conclure en donnant toutes les solutions du problème posé.