Programme de colle n^o 29 : Variables aléatoires discrètes.

*Semaine du lundi **2 juin**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Variables aléatoires discrètes (suite)

29.1 Variable aléatoire discrète finie ou infinie. Toute variable aléatoire à valeurs entières (i.e. : à support inclus dans $\mathbb{Z}$) est discrète. Exemple de variable aléatoire discrète à valeurs non entières.

29.2 Système complet d'événements $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ associé à une variable aléatoire discrète X. Corollaire : Soit X une variable aléatoire discrète, alors $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$ si X est finie, et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}([X = x_k])$ converge et a pour somme 1, où $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ sans répétitions, si X est infinie.

29.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète. Proposition (admise) : condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une variable aléatoire de loi donnée. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète. Propriétés vérifiées par toute telle fonction de répartition. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète caractérise sa loi.

L'énoncé du cours disant que deux variables aléatoires discrètes ont la même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition est problématique avec la définition du support au programme, mais trop important pour ne pas être mentionné. Les élèves ne sont pas attendus sur ce point.

29.4 Variables aléatoires discrètes indépendantes. Si X et Y sont des VAD indépendantes, alors $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants pour toutes parties I et J de $\mathbb{R}$ qui sont finies ou des intervalles.

29.5 Définition de la variable aléatoire discrète $g(X)$, où X est une variable aléatoire discrète et g une fonction définie sur le support de X.

Énoncé admis.

Quelques questions de cours

1. (Retour de DS) Montrer que, dans tout graphe non orienté, deux sommets reliés par une chaîne sont reliés par une chaîne simple (i.e., n'empruntant pas deux fois la même arête). Existence d'une chaine minimale admise. On sera sensible à la qualité de la rédaction.
2. Rappeler la définition des événements $[X = x]$ et $[X \leq x]$, où X est une variable aléatoire et x un réel. Montrer que, pour tout variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé d'univers noté Ω, $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Énoncer le corollaire immédiat (prop. 14) de cette proposition.
3. Définir la notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire. Déterminer la loi de la variable aléatoire X donnant le rang du premier pile lors d'une succession infinie de lancers d'une pièce à Pile ou Face, ayant probabilité $p \in]0, 1[$ de faire Pile, en admettant que l'on obtient ainsi toujours au moins une fois Pile (et que X est donc bien définie). *Élèves : c'est donc plus simple que ce qui a été fait en classe (exemple 17) mais vous devez légèrement adapter la démonstration (le support devient $\mathbb{N}^*$).*
4. Définir la notion de fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète. Représenter (sans démonstration) le graphe de la fonction de répartition de la variable aléatoire donnant la face obtenue lors du lancer d'un dé à 6 faces, dont l'équilibre des faces est donné par l'interrogation. Énoncer la proposition (21) donnant les propriétés vérifiées par la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète quelconque. Démontrer les deux premiers points.
5. Énoncer la proposition (21) donnant les propriétés vérifiées par la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète quelconque. Démontrer l'énoncé portants sur sa limite en $+\infty$.
6. Définir la notion de variables aléatoires discrètes indépendantes. Énoncer la proposition (25) donnant l'indépendance d'événements définis à l'aide de variables aléatoires discrètes indépendantes. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $[X \in \{x_1, x_2\}]$ et $[Y \in \{y\}]$ sont indépendants, pour tous réels x_1, x_2, y.