Devoir surveillé numéro 8

Devoir du 6 juin.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Analyse.*

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1 : étude de f

- (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x .
(b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
(c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$. On ne cherchera pas à calculer les limites de f .
- (a) Montrer que f est impaire.
(b) Étudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexions de la courbe de f .
- (a) Déterminer des réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}.$$

- (b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x on a :

$$f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

- (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$.

- (b) Déterminer un réel C tel que :

$$\forall x \geq 1, \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq C + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt.$$

- (c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ existe et est finie. *On dira bientôt que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente.*

- (d) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$.

5. (a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?
(b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f .
6. (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
7. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$.
(b) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ? Sur la série de terme général u_n ?

Exercice 2 Une chaîne de Markov.

Un organisme d'état étudie l'évolution de l'emploi selon un modèle probabiliste, dans un secteur où des pratiques problématiques sont systématiques ce qui nuit à la stabilité de l'emploi. Les individus sont regroupés selon les 4 catégories suivantes :

- La catégorie 1 est constituée des individus au chômage.
- La catégorie 2 est constituée des individus ayant un emploi à priori stable.
- La catégorie 3 est constituée des individus ayant un emploi précaire (contrats de courte durée, par exemple).
- La catégorie 4 est constituée des retraités.

On s'intéresse à l'évolution d'un individu au sein de ces catégories sur le long terme.

On observe les résultats suivants :

- Si un individu est dans la catégorie 1 (chômage) à un moment donné, alors il se trouve de manière équiprobable dans l'une des catégories 1,2,3 ou 4 une décennie plus tard.
- Si un individu est dans la catégorie 2 (emploi stable) à un moment donné, alors il se trouve de manière équiprobable dans l'une des catégories 1 ou 4 une décennie plus tard.
- Si un individu est dans la catégorie 3 (contrat précaire), alors il se retrouve de manière équiprobable dans la catégorie 2 ou 3 une décennie plus tard.
- Si un individu est dans la catégorie 4 (retraite), alors il reste dans cette catégorie une décennie plus tard.

Étude probabiliste.

On considère un individu qui est au chômage lors de la première décennie de notre étude. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience aléatoire constituée par l'évolution, étudiée par décennies, de cet individu au sein de ces catégories.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire donnant la catégorie de cet individu au début de la n -ième décennie d'étude. En particulier, notre individu étant initialement au chômage, on a :

$$\mathbb{P}([X_1 = 1]) = 1 \text{ et } \forall i \in \{2, 3, 4\}, \mathbb{P}([X_1 = i]) = 0.$$

1. Déterminer la loi de X_2 .
2. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}([X_3 = 4])$ que l'individu soit retraité au début de la 3-ième décennie d'étude.
3. En déduire la probabilité que l'individu soit au chômage au début de la 2e décennie d'étude sachant qu'il est retraité au début de la 3e décennie d'étude.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix}$.

4. Dans cette question, on fixe un entier $n \geq 1$.

- (a) Que peut-on dire de la somme $\sum_{i=1}^4 \mathbb{P}([X_n = i])$? Justifier.
- (b) Montrer soigneusement que $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{4}\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 2])$.
- (c) Obtenir des relations similaires pour $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$, $\mathbb{P}([X_{n+1} = 3])$ et $\mathbb{P}([X_{n+1} = 4])$ (en fonction de X_n).
- (d) En déduire que $V_{n+1} = LV_n$, où L est une matrice à exprimer en fonction de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calcul des puissances de L et conclusion

6. (a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

(b) Déterminer une matrice D diagonale et une matrice N de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ telles que :

$$P^{-1}MP = D + N.$$

(c) Calculer DN , ND et N^2 .

(d) En déduire : $\forall n \geq 2, M^n = PD^nP^{-1}$.

7. Soit $n \geq 3$ un entier. À l'aide des résultats précédents, montrer que :

$$L^{n-1} = \frac{4}{27} \left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. En déduire, pour tout $n \geq 3$, la loi de X_n (en fonction de n).

— Fin de l'énoncé —