

Programme de colle n° 30 : Variables aléatoires discrètes (suite).

Semaine du lundi 9 juin.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Transformée de variables aléatoires discrète

30.1 Variable aléatoire discrète $g(X)$, où X est une variable aléatoire discrète et g une fonction réelle définie sur le support de X . Somme et produit de deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé.

Moments d'une variable aléatoire discrète

30.2 Espérance d'une variable aléatoire finie. Espérance d'une variable aléatoire discrète infinie. Brève explication de la condition de convergence absolue pour justifier la bonne définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète infinie.

30.3 Linéarité de l'espérance. Application : espérance de la variable aléatoire donnant le nombre de Piles obtenus lors de n lancers d'une pièce tombant sur pile avec probabilité p donnée.

30.4 Positivité de l'espérance. Toute variable aléatoire positive d'espérance nulle est presque sûrement nulle. Croissance de l'espérance (2 versions).

30.5 Notion de variable aléatoire centrée. Variable aléatoire centrée associée à une VAD admettant une espérance.

30.6 Le théorème de transfert, cas fini et infini.

30.7 Variance d'une variable aléatoire discrète. Positivité de la variance, variables aléatoires discrètes admettant une variance nulle. Ecart-type.

30.8 Proposition admise : soit X une VAD, si X^2 admet une espérance alors X admet une espérance. Formule de Koenig-Huygens (sera démontrée mardi).

Python

30.9 L'algorithme de Dijkstra.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion d'espérance d'une variable aléatoire discrète, finie ou infinie. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire discrète X donnant le rang du premier pile lors d'une succession infinie de lancers d'une pièce à pile ou face, ayant probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur pile. L'élève pourra rappeler la loi de X sans calcul.
2. Donner une variable aléatoire n'admettant pas d'espérance (exemple 32 à détailler entièrement), et le démontrer.
3. Énoncer la proposition portant sur la linéarité de l'espérance. Montrer l'énoncé portant sur une transformée affine (premier point) en admettant l'existence de l'espérance (élèves : vous pouvez passer la partie de la preuve justifiant la convergence absolue). En déduire le nombre moyens de Piles obtenus lors de n lancers d'une pièce à Pile ou Face tombant sur Pile avec probabilité $p \in [0, 1]$.
4. Énoncer et démontrer les propriétés de positivité de l'espérance.
5. Énoncer le théorème de transfert (2 versions). Étudier l'éventuelle espérance de la variable aléatoire e^X , où X donne le rang du premier pile lors d'une succession infinie de lancers d'une pièce à pile ou face, ayant probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur pile.
6. Définir la notion de variance d'une variable aléatoire discrète (2 versions). Énoncer et démontrer la proposition portant sur le signe de la variance et sur les variables aléatoires discrètes admettant une variance nulle.
7. Appliquer l'algorithme de Dijkstra sur l'exemple suivant (au choix de l'interrogation), en gardant trace au tableau des explorations effectuées.