Lycée Hoche
ECG1 A

2024-2025
Mathématiques

TD de mathématiques n°22 : Équation différentielles

Pour commencer

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles ci-dessous :

(a) $y' - 2y = 0$ (b) $2'y + y = 0$ (c) $y' + 3y = 6$ (d) $3y' - y = 1$

Exercice 2 On considère l'équation différentielle $y' + y = e^{-t}$, notée (E). Soit $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & te^{-t} \end{array}$.

(a) Montrer que f_p est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

Exercice 3 On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 4t + 3$, notée (E).

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha t + \beta \end{array}$.

(a) À quelles conditions sur α et β la fonction f_p est-elle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) ?

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

Exercice 4 Déterminer l'unique solution $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

(a) $y' + y = 0$ telle que $f(0) = -1$

(b) $4y' + 3y = -12$ telle que $f(0) = 2$

(c) $3y' - y = 0$ telle que $f(-1) = 3$

(d) $2y - y' = 1$ telle que $f(2) = \frac{2e^4 - 1}{2}$

Exercice 5 On considère l'équation différentielle $y' + 4y = t^2 e^{-4t}$, notée (E).

(a) Montrer qu'il existe une fonction $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & C(t)e^{-4t} \end{array}$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

Exercice 6 On considère l'équation différentielle $y' + y = t^2 - t + 1$, notée (E).

(a) Déterminer une solution polynomiale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

(c) Déterminer l'unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition $f(0) = 1$.

Exercice 7 10 Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = a(1 - y)$.

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles ci-dessous :

(a) $y'' - y' - 2y = 0$ (c) $y'' - 2y' + y = 0$ (e) $6y'' - 5y' + y = 3$ (g) $9y'' + 6y' + y = 2$

(b) $y'' + y' - 6y = 0$ (d) $4y'' + 4y' + y = 0$ (f) $y'' - 2y' - y = -1$ (h) $y'' + 4y' + 4y = 8$

Exercice 9 Déterminer l'unique solution $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

(b) $y'' + 2y' + y = -1$ telle que $f(1) = 0$ et $f'(0) = 1$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

(d) $y'' - y = 2$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$

Exercice 10 On considère l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 27t^2$, notée (E).

(a) Déterminer une solution polynomiale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

(c) Déterminer l'unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 11 On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : 2y'' - 3y' + y = t^2 + e^{2t}$.

(a) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : 2y'' - 3y' + y = 0$.

(b) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(E_1) : 2y'' - 3y' + y = t^2$ sous la forme $t \longmapsto at^2 + bt + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(c) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(E_1) : 2y'' - 3y' + y = e^{2t}$ sous la forme $t \longmapsto \alpha e^{2t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

(e) Déterminer l'unique solution f de E sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 15$ et $f'(0) = 7$.

Exercice 12 On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1 - e^{-3t}$, notée (E).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{-3t}. \end{array}$

(a) À quelle condition sur α la fonction f_p est-elle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+2y'+y = e^{-3t}$?

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

Exercice 13 Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + \left(1 - a^2\right) y = 1 + a^2$.

Exercice 14 On considère l'équation différentielle du second ordre $\left(1 + t^2\right) y'' + 4ty' + \left(1 - t^2\right) y = 0$, notée (E).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution sur $\mathbb{R}$ de (E). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) = \left(1 + t^2\right) f(t)$.

(a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer f' et f'' en fonction de g, g' et g''.

(b) Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

(c) Déterminer l'unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

Modélisations

Exercice 15 On suppose que la population d'un pays est modélisé (à l'unité près) par une fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, la valeur $P(t)$ représentant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'effectif de la population à l'instant t, l'instant présent étant l'instant $t = 0$ (l'unité de temps étant l'année).

On suppose que l'accroissement de la population est proportionnel à l'effectif de la population, indépendamment de l'échelle de temps considérée.

Enfin, dans ce pays, on suppose que l'effectif de la population double tous les 20 ans.

(a) Justifier que P est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' = \alpha y$.

(b) Déterminer la valeur de α.

(c) On suppose que $P(0) = 10^6$. Quelle est la valeur de $P(10)$? Quelle est la valeur de $P(100)$?

(d) En combien de temps la population du pays triple-t-elle?

Exercice 16 On considère un médicament effervescent hydrosoluble que l'on place dans un verre d'eau, la quantité d'eau étant suffisante pour que la totalité du médicament puisse se dissoudre.

La quantité de médicament solide diminue avec le temps et est modélisée par une fonction $Q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$(l'unité de mesure étant le gramme).

On suppose que la quantité initiale de médicament solide est $Q(0) = 20$ grammes.

On suppose également qu'au bout de 5 minutes, la moitié du médicament est dissolue dans l'eau.

Les lois de la chimie garantissent que pour de petites échelles de temps, le taux de variation de quantité du médicament dans l'eau est proportionnel à la quantité de médicament restante.

(a) Justifier que Q est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' = \alpha y$.

(b) Déterminer le signe de α, puis la valeur de α.

(c) On considère que l'on peut boire le médicament à partir du moment où la quantité de médicament solide devient inférieure ou égale à 1 gramme.

(i) Peut-on boire le médicament 10 minutes après l'avoir plongé dans l'eau?

(ii) Combien de temps faut-il attendre au minimum avant de pouvoir boire le médicament?

Exercice 17 On considère une bille que l'on place à une certaine hauteur du sol. On lâche cette bille à un instant $t = 0$ (mesuré en secondes) et on suppose que la hauteur de la bille est modélisée par une fonction $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ (l'unité de mesure étant le mètre). On note $T \in \mathbb{R}_+^*$ le plus petit instant où la bille touche le sol.

Les lois de la mécanique classique dues à Newton nous apprennent que l'accélération de pesanteur exercée sur la bille par le champ gravitationnel terrestre entraîne (sous l'hypothèse où l'on néglige les frottements de l'air qui tendent à ralentir la chute de la bille) que la fonction h est solution sur $[0,T]$ de l'équation différentielle :

$$y'' = -10$$

(a) Déterminer explicitement $h'(t)$ en fonction de $h'(0)$ et t, pour tout $t \in [0,T]$.

(b) Déterminer explicitement $h(t)$ en fonction de $h(0), h'(0)$ et t, pour tout $t \in [0,T]$.

(c) On suppose que l'on lâche la bille à une hauteur initiale de $h(0) = 5$ mètres et sans vitesse initiale, c'est-à-dire que $h'(0) = 0$. Déterminer la valeur de T.

(d) On suppose que l'on lâche la bille à une hauteur initiale de $h(0) = 5$ mètres et avec une vitesse initiale de 10 mètres par seconde, c'est-à-dire que $h'(0) = -10$. Déterminer la valeur de T.

Exercice 18 On s'intéresse à la production d'un bien faisant intervenir deux facteurs : le capital et le travail.

- La production totale est une fonction, dépendant du temps, $P : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
- Le capital est une fonction, dépendant du temps, $K : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
- Le travail est une fonction, dépendant du temps, $L : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
- On suppose qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+, P(t) = K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}$.

Les évolutions temporelles du capital et du travail sont régies par les hypothèses suivantes :

- La capital se déprécie à taux par unité de temps constant $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ et une proportion $s \in]0,1[$ de la production est réinvestie, ce qui permet de considérer que K est solution sur $\mathbb{R}_+$de l'équation différentielle $y' = sP - \delta y$.
- Le taux de croissance du travail est constant égal à $g \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui permet de considérer que L est solution sur $\mathbb{R}_+$de l'équation différentielle $y' = gy$.

On souhaite déterminer les tendances de long terme de l'évolution du capital dans ce modèle (de Solow). On considère les fonctions $p = \frac{P}{L}$ de production par unité de travail et $k = \frac{K}{L}$ de capital par unité de travail.

(a) Exprimer $L(t)$ explicitement en fonction de t et de $L(0)$.

(b) Montrer que k est solution sur $\mathbb{R}_+$de l'équation différentielle $(E) : y' = sy^\alpha - (\delta + g)y$.

(c) Déterminer l'unique trajectoire d'équilibre non-nulle de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

(d) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $z(t) = k(t)^{1-\alpha}$. Montrer que z est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sur $\mathbb{R}_+$.

(e) Résoudre l'équation différentielle (E) et déterminer $\lim_{t \to +\infty} k(t)$.

Pour continuer

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 19 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = t + 1$.

Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \alpha t + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 20 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = e^t$.

Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \alpha e^t$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 21 On considère l'équation différentielle $y' + 2y = e^{3t}$, notée (E).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{3t} \end{array}$

(a) À quelle condition sur α la fonction f_p est-elle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) ?

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

Exercice 22 On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : ty' - y = 0$.

(a) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(t) = \frac{f(t)}{t}$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Déterminer l'unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(1) = 1$.

Exercice 23 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$ (on pourra déterminer une équation différentielle simple dont f est solution).

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 24 On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 3y = e^t$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha t e^t \end{array}$.

(a) À quelle condition sur α la fonction f_p est-elle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) ?

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

Exercice 25 Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $ay'' - y' + (1-a)y = 0$.

Exercice 26 On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : t^2 y'' - 2y = 3t^2$.

(a) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $t^2 y'' - 2y = 0$.

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on pose $g(s) = f(e^s)$.

(i) Déterminer, pour tout $s \in \mathbb{R}, g'(s)$ et $g''(s)$.

(ii) En déduire que pour tout $s \in \mathbb{R}, g''(s) - g'(s) - 2g(s) = 0$.

(iii) En déduire une expression explicite de g sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que la fonction $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \ln(t) \end{array}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Déterminer l'unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 6$.

Applications, évolutions en temps continu

Exercice 27 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f' ne s'annule jamais.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $a(t)$ l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(t, f(t))$ avec l'axe des abscisses.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose enfin $\varphi(t) = t - a(t)$.

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}$. Interpréter géométriquement cette propriété.

Exercice 28 On considère un corps dont la température varie en fonction du temps et est modélisée par une fonction $\theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, la valeur de $\theta(0)$ étant la température de ce corps à l'instant $t = 0$.

On suppose que ce corps est placé dans un environnement à température constante de valeur $\theta_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce contexte, les lois de la thermodynamique permettent d'établir que : "la vitesse de refroidissement du corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et celle du milieu ambiant".

(a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que θ est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle $(E) : y' + \alpha y = \alpha\theta_0$.

(b) Quel est le signe de α ?

(c) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+$.

(d) Que peut-on remarquer dans le cas où $\theta(0) = \theta_0$?

(e) En déduire une expression explicite de θ dans le cas où $\theta(0) = 180$ et $\theta_0 = 22$.

(f) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \theta(t)$ et interpréter ce résultat.

(g) On suppose que l'on sort à l'instant $t = 0$ une tarte aux pommes d'un four chauffé à 180° pour la placer dans une pièce dont la température vaut 22°. Au bout de 10 minutes, on constate que la température de la tarte est de 101°. On souhaite déguster la tarte à une température de 25°.

(i) Déterminer la valeur de α.

(ii) Déterminer le temps $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ auquel la tarte aura atteint la température souhaitée.

Exercice 29 Le prix d'un bien évolue en fonction du temps et est modélisé par une fonction $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Ce prix dépend de l'offre et de la demande qui sont elles-mêmes évolutives en fonction du temps.

On note $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions modélisant respectivement les niveaux d'offre et de demande en fonction du temps et on suppose que :

- il existe deux fonctions affines φ et ψ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = \varphi(p(t))$ et $g(t) = \psi(p(t))$.
- l'offre est une fonction strictement croissante du prix, de valeur strictement négative pour un prix nul.
- la demande est une fonction strictement décroissante du prix, de valeur strictement positive pour un prix nul.
- la taux de variation du prix est proportionnel à la différence entre l'offre et la demande, indépendamment de l'échelle de temps considérée.

(a) Montrer que p est solution sur $\mathbb{R}_+$d'une équation différentielle linéaire de la forme $y' = k(\alpha - \beta y)$ avec $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}_+^*$, équation qui sera notée (E) par la suite (indication : traduire soigneusement les hypothèses).

(b) Montrer que (E) admet une unique trajectoire d'équilibre, que l'on déterminera.

(c) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+$. On explicitera les solutions en fonction du prix initial $p(0)$.

(d) Montrer que p converge lorsque $t \longrightarrow +\infty$ vers une valeur indépendante de $p(0)$ que l'on déterminera.