

Exercice 11-a) Soit $t \in \mathbb{R}$ $t^2 \geq 0$ donc $1+t^2 \geq 1$ donc $\ln(1+t^2) \geq \ln(1) = 0$, par croissance des logarithmesDonc : $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(1+t^2) \geq 0$

Ainsi, par positivité de l'intégrale.

$$\forall x \geq 0, \int_0^x \ln(1+t^2) dt \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{De plus: } \forall x \leq 0, \int_0^x \ln(1+t^2) dt = - \int_x^0 \ln(1+t^2) dt \leq 0, \quad (2)$$

car par positivité, si $x \leq 0$, alors $\int_x^0 \ln(1+t^2) dt \geq 0$.Finalement, $f(x)$ est du même signe que x d'après (1) et (2).b) $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, car $\begin{matrix} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(t) \end{matrix}$ et $\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 1+t^2 \end{matrix}$ sont continues, et : $\forall t \in \mathbb{R}, 1+t^2 > 0$.Par le théorème fondamental de l'analyse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et f est l'unique primitive de $t \mapsto \ln(1+t^2)$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(1+x^2)$.c) On a montré : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(1+x^2) \geq \ln(1) = 0$.Donc f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.2a) Soit $x \in \mathbb{R}$ f est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0 :

$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2) dt.$$

Effectuons le changement de variable " $u = -t$ " dans cette intégrale, écrite car c'est un changement de variable affine.

Bonnes : Si $t=0$, $-t=0$ et si $t=-x$, alors $-t=x$.

Différentielle : $u = -t$ donc $du = -dt$ donc $dt = -du$.

Intégrande : $t = -u$ donc $\ln(1+t^2) = \ln(1+(-u)^2) = \ln(1+u^2)$.

$$\begin{aligned} \text{Finalement : } \int_0^{-x} \ln(1+t^2) dt &= \int_0^x -\ln(1+u^2) du \\ &= - \int_0^x \ln(1+u^2) du \quad (\text{l'écriture}) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Donc $f(-x) = -f(x)$, et ce pour tout réel x .

f est impaire.

b) On a montré : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(1+x^2)$.

Or, $x \mapsto 1+x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ (fonctions usuelles).

donc f' est de classe $\mathcal{C}^1$ également par composition ($\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$).

Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ $f''(x)$ est du signe (strict) de x pour tout $x \in \mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	concave		convexe

La courbe de f présente donc un unique point d'inflexion, avec point de coordonnées $(0, f(0))$. $f(0) = \int_0^0 \ln(1+t^2) dt = 0$.

Donc f est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$, et sa courbe admet un unique point d'inflexion : le point de coordonnées $(0,0)$.

EXIP3

3a) Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$b) \quad \forall t \in \mathbb{R}:$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{1+t^2} = a \frac{1+t^2}{1+t^2} + \frac{b}{1+t^2}$$

Donc pour que a et b conviennent, il suffit d'avoir:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ a + b = 0 \end{array} \right\} \text{Ent-ä-dine} \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \end{array} \right\}$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$

b) Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \int_0^x \ln(t+1) dt = \int_0^x u'(t)v(t) dt, \quad \text{on l'on a posé:}$$

$\begin{array}{l} \gamma u: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} \\ \gamma v: \mathbb{E} \rightarrow \text{lin}(\mathbb{N}(\mathbb{E})) \end{array}$
 $\quad$
 u et v sont de classe F^q sur $\mathbb{R}$, donc
 $\quad \quad \quad \downarrow$
 $\quad \quad \quad$ (voir 2b))

per integration per parts:

$$\begin{aligned} f(x) &= [u(t)v'(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v''(t) dt \\ &= x \ln(1+x^2) - 0 - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2} dt \\ &= x \ln(1+x^2) - 2 \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= x \ln(1+x^2) - 2 \int_0^x dt + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= x (\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

On a bien montré:

für $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

Ex 1P24

(c. a)

$$\forall x \geq 1, \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 1$$

b) Soit $x \geq 1$.

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$\text{Or, } \forall t \geq 1, \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \quad (\text{car } 0 < t^2 \leq t^2+1).$$

$$\text{Donc: } \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [1, x], \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \\ 1 \leq x \end{array} \right. \quad \text{Par croissance de l'intégrale.}$$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2} dt.$$

Finalement:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt, \text{ et ce pour tout } x \geq 1.$$

$$\text{L'inégalité voulue est donc montrée pour } C = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

c) D'après la question précédente:

$$\forall x \geq 1, \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + 1 - \frac{1}{x} \leq 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

(car $\frac{1}{x} > 0$)

$$\text{Donc } \phi: \begin{cases} \text{ } \\ x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \end{cases} \text{ est majoré (par } 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \text{)}.$$

De plus, ϕ est croissante car par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\phi \text{ est de classe } F^1 \text{ sur } [1, +\infty[\text{ et } \forall x \geq 1, \phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} \geq 0.$$

EX125

ϕ étant croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone (pour les fonctions réelles):

ϕ admet une limite finie en $+\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ existe et est finie

d) $\forall x > 1, f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + \phi(x)$, d'après 3b).

Or: $\begin{matrix} 1+x^2 \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{matrix}$ donc par composition: $\ln(1+x^2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc sans forme indéterminée:

$$x(\ln(1+x^2) - 2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Mais on dispose de $c \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c$, pour la question 4c).

Donc par somme: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (1).

De plus: $\forall x < 0, f(x) = -f(-x)$ (f impaire).

$\begin{cases} -x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$ donc par composition, $-f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.
 $-f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ (par (1))

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

Finalement: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

5 a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$. Donc :

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = \int_0^1 1 \cdot dt = [t]_0^1 = 1 = u_0.$$

L'expression donnée pour u_0 est cohérente avec l'expression générale de u_n .

b) $u_n = \int_0^1 \ln(1+t^2) dt = f(1)$, car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$.

6 a) Soient $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$0 \leq t \leq 1$ donc $0^2 = 0 \leq t^2 \leq 1^2 = 1$ ($t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).

Donc $1 \leq 1+t^2 \leq 2 < e$ car $e \approx 2,7$.

Donc $0 = \ln(1) \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(e) = 1$, par croissance stricte du logarithme.

Donc $(\ln(1+t^2))^n \geq 0$:

$$\ln(1+t^2)^{n+1} \leq \ln(1+t^2)^n, \text{ et ce pour tout } t \in [0, 1].$$

Par croissance de l'intégrale ($0 \leq 1$) :

$$u_{n+1} = \int_0^1 \ln(1+t^2)^{n+1} dt \leq \int_0^1 \ln(1+t^2)^n dt = u_n,$$

et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall t \in (0, 1), \ln(1+t^2) > \ln(1) = 0$ et $0 \leq 1$ donc :

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in (0, 1), \ln(1+t^2)^n > 0 \\ 0 \leq 1 \end{array} \right\} \text{ Par positivité de l'intégrale.}$$

$$u_n = \int_0^1 \ln(1+t^2)^n dt > 0.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée et décroissante (6a). Par le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Ex 187

7a) Soit $n \in \mathbb{N}$
 $\forall t \in [0, 1], 0 \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(2)$ (car $1+t^2 \leq 1+1^2=2$).
Donc : $\forall t \in [0, 1], 0 \leq \ln(1+t^2)^n \leq \ln(2)^n$.

Par intégration des inégalités ($0 \leq 1$):

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^2)^n dt \leq \int_0^1 \ln(2)^n dt = \ln(2)^n \times (1-0) = \ln(2)^n.$$

Donc $0 \leq u_n \leq \ln(2)^n$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \ln(2)^n \\ 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \ln(2)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{car } 0 < \ln(2) < 1 \\ \text{(car } 1 < 2 < e \text{)}. \end{array}$

Par le théorème des gendarmes : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, $\ln(2) \in]-1, 1[$ car $\ln(2) \in]0, 1[$, donc $\sum_{n \geq 0} \ln(2)^n$ converge.

Par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}$$

Exercice 2.

1. Au début de la première décennie, l'individu est dans la catégorie 1.
Donc d'après les résultats observés, au début de la 2^e décennie, l'individu est dans une des catégories 1, 2, 3 ou 4 et ce de manière équiprobable.
 $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$, et $P(X_2=1) = P(X_2=2) = P(X_2=3) = P(X_2=4) = \frac{1}{4}$.

2. $X_2(\Omega) = \{1, 4\}$ donc $(X_2=i)_{i \in \{1, 2, 3, 4\}}$ est un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales ($\forall i \in \{1, 4\}, P(X_2=i) = \frac{1}{4} \neq 0$):
$$P(X_3=4) = P(X_2=1)P_{(X_2=1)}(X_3=4) + P(X_2=2)P_{(X_2=2)}(X_3=4) + P(X_2=3)P_{(X_2=3)}(X_3=4) + P(X_2=4)P_{(X_2=4)}(X_3=4).$$

Or, si $(X_2=1)$ est réalisé, l'individu est dans l'une des catégories 1, 2, 3, 4 de manière équiprobable au début de la 3^e décennie:

$$P_{(X_2=1)}(X_3=4) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{De même, } P_{(X_2=i)}(X_3=4) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } i=1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } i=2 \\ 0 & \text{si } i=3 \\ 1 & \text{si } i=4 \end{cases} \quad \text{ / pour tout } i \in \{1, 4\}$$

Donc:

$$\begin{aligned} P(X_3=4) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Donc $P(X_3=4) = \frac{7}{16}$.

3. On a $P(X_2=1) = \frac{1}{4} \neq 0$, et $P(X_3=4) = \frac{7}{16} \neq 0$. Par la

formule de Bayes:

$$P_{(X_3=4)}(X_2=1) = \frac{P(X_2=1)P_{(X_2=1)}(X_3=4)}{P(X_3=4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{1}{7} \quad \text{ / par les questions précédentes }$$

Ex P2

Donc $IP_{[X_3=4]}(X_2=1) = \frac{1}{7}$

4.a)

$([X_n=i])_{i \in \{1,4\}}$ est un système complet d'événement (l'individu est dans exactement une catégorie après n décennies) donc :

$$\sum_{i=1}^4 IP(X_n=i) = 1.$$

b) $([X_n=i])_{i \in \{1,4\}}$ forme un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales :

$$IP(X_{n+1}=1) = IP([X_n=1] \cap [X_{n+1}=1]) + IP([X_n=2] \cap [X_{n+1}=1]) + IP([X_n=3] \cap [X_{n+1}=1]) + IP([X_n=4] \cap [X_{n+1}=1]).$$

De plus,

1^{er} cas : Si $IP(X_n=1) = 0$, alors $[X_n=1] \cap [X_{n+1}=1] \subset [X_n=1]$ donne :

$$0 \leq IP([X_n=1] \cap [X_{n+1}=1]) \leq IP(X_n=1) = 0.$$

Donc dans ce cas, $IP([X_n=1] \cap [X_{n+1}=1]) = 0 = \frac{1}{4} \times IP(X_n=1)$.

2^e cas : Sinon, par probabilités composées ($IP(X_n=1) \neq 0$) :

$$\begin{aligned} IP([X_n=1] \cap [X_{n+1}=1]) &= IP_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1) \cdot IP(X_n=1) \\ &= \frac{1}{4} IP(X_n=1) \quad \text{d'après l'énoncé.} \end{aligned}$$

Dans tous les cas : $IP([X_n=1] \cap [X_{n+1}=1]) = \frac{1}{4} IP(X_n=1)$.

Par un raisonnement similaire, vu les résultats d'évolution observés :

$$\begin{cases} IP([X_n=2] \cap [X_{n+1}=1]) = \frac{1}{2} IP(X_n=2) \\ IP([X_n=3] \cap [X_{n+1}=1]) = 0 \cdot IP(X_n=3) = 0 \\ IP([X_n=4] \cap [X_{n+1}=1]) = 0 \end{cases}$$

Ex 2B3

L'égalité précédente devient:

$$IP(X_{n+1}=1) = \frac{1}{4} IP(X_n=1) + \frac{1}{2} IP(X_n=2)$$

c) De même:

$$\begin{aligned} IP(X_{n+1}=2) &= IP([X_n=1] \cap [X_{n+1}=2]) + IP([X_n=2] \cap [X_{n+1}=2]) + IP([X_n=3] \cap [X_{n+1}=2]) \\ &\quad + IP([X_n=4] \cap [X_{n+1}=2]) \\ &= \frac{1}{4} IP(X_n=1) + 0 \cdot IP(X_n=2) + \frac{1}{2} IP(X_n=3) + 0 \cdot IP(X_n=4) \end{aligned}$$

De même: $IP(X_{n+1}=3) = \frac{1}{4} IP(X_n=1) + \frac{1}{2} IP(X_n=3)$

Puis:

$$\begin{cases} IP(X_{n+1}=2) = \frac{1}{4} IP(X_n=1) + \frac{1}{2} IP(X_n=3) \\ IP(X_{n+1}=3) = \frac{1}{4} IP(X_n=1) + \frac{1}{2} IP(X_n=3) \\ IP(X_{n+1}=4) = \frac{1}{4} IP(X_n=1) + \frac{1}{2} IP(X_n=2) + IP(X_n=4) \end{cases}$$

d) $V_{n+1} = \begin{pmatrix} IP(X_{n+1}=1) \\ IP(X_{n+1}=2) \\ IP(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} IP(X_n=1) + \frac{1}{2} IP(X_n=2) \\ \frac{1}{4} IP(X_n=1) + \frac{1}{2} IP(X_n=3) \\ \frac{1}{4} IP(X_n=1) + \frac{1}{2} IP(X_n=2) \end{pmatrix} \quad (\text{questions b) et c)})$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IP(X_n=1) \\ IP(X_n=2) \\ IP(X_n=3) \end{pmatrix}$$

Donc: $V_{n+1} = L V_n$,

où l'on a posé $L = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} M$.

5. Par récurrence, montrons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Init. $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'après l'énoncé, et $L^{1-1} = L^0 = I_3$
donc $L^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1$.

D'où l'initialisation.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $V_n = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors, par G.d): $V_{n+1} = L V_n$.

Donc par hypothèse de récurrence: $V_{n+1} = L \times L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où $V_{n+1} = L^{(n+1)-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui conclut l'hérédité.

On a bien montré par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6.a) $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \forall Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = y_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ 3x_2 + 4x_3 = y_1 + 2y_2 \\ 3x_2 - 2x_3 = y_1 + 2y_3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ 3x_2 + 4x_3 = y_1 + 2y_2 \\ -6x_3 = -2y_2 + 2y_3 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2(y_1 - x_2) = 1/2(y_1 - 1/3(y_1 + 2y_2 - 4/3 y_3) - 2/9 y_2 - 4/9 y_3) \\ x_2 = 1/3(y_1 + 2y_2 - 4/3 y_2 + 4/3 y_3) = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{9}y_2 + \frac{4}{9}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 & -2/9 \\ 1/3 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} Y$$

EX205.

Donc : P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 & -2/9 \\ 1/3 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

b) On remarque : $P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Donc $P^{-1}MP = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
 $= P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Posons $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (diagonale) et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a bien $P^{-1}MP = D + N$.

c) $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De même, $ND = O_3$ et $N^2 = O_3$.

Donc $DN = ND = N^2 = O_3$.

d) Montrons par récurrence : $\forall n \geq 2$, $H(n) : M^n = P D^n P^{-1}$.

Init : $P^{-1}MP = D + N$ donc $(P^{-1}MP)^2 = (D + N)^2 = D^2 + ND + DN + N^2$
 $= D^2$ par la question c).

Or, $(P^{-1}MP)^2 = (P^{-1}MP)(P^{-1}MP) = P^{-1} \underbrace{MPP^{-1}}_{=I_3} MP = P^{-1}M^2P$.

Donc $P^{-1}MP = D^2$, d'où $M = P D^2 P^{-1}$, d'où $H(2)$.

EX2PS

Hérédité: Soit $n \geq 2$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$.

Par $H(n)$, $M^n = P D^n P^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } M^{n+1} &= M \times M^n = (P(D+N)P^{-1}) \times P D^n P^{-1} \\ &= P(D+N)P^n P^{-1} \quad (\text{car } P^{-1}P = I_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } (D+N)D^n &= D^{n+1} + ND^n = D^{n+1} + \underbrace{(ND)D^{n-1}}_{= 0_3 \text{ par c.}} \quad (\text{car } n-1 \geq 0) \\ &= D^{n+1} \end{aligned}$$

Donc : $M^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$.

Donc l'hérédité.

On a bien montré par récurrence : $\forall n \geq 2, M^n = P D^n P^{-1}$.

7. D est diagonale donc ses puissances sont données par :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$.

Par ce qui précède :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, M^n &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \times (3^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) P^{-1} \\ &= 3^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{9} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc : $\forall n \geq 2, M^n = \frac{3^n}{9} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

EX206

Soit $n \geq 3$.

Alors, $L = \frac{1}{4} M$ donc $L^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} M^{n-1}$.

$n-1 \geq 2$ donc par ce qui précède.

$$L^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{3}{9} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{4}{27} \left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc : } \forall n \geq 3, L^{n-1} = \frac{4}{27} \left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Soit $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} V_n = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{4}{27} \left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{27} \left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Mais } V_n = \begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix} \text{ donc :}$$

$$P(X_n=1) = P(X_n=2) = P(X_n=3) = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

$$\text{Enfin, } P(X_n=4) = 1 - \sum_{i=1}^3 P(X_n=i) \quad \text{par 4.a)}$$

$$= 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (\text{on reconnaît une somme constante}).$$

Donc la loi de X_n est donnée par :

$$X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$P(X_n=1) = P(X_n=2) = P(X_n=3) = \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\text{et } P(X_n=4) = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$