TD de mathématiques n°23 : Applications linéaires

Pour commencer

Applications linéaires

Exercice 1 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-3y, x+y, 2x-y) \end{array} \right.$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 2 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+z, x+y) \end{array} \right.$. Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice canoniquement associée à f.

Exercice 3 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, 1-x) \end{array} \right.$. Montrer que f n'est pas linéaire.

Exercice 4 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ y-2z \\ 3x+y+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 5 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x+y \\ -x-y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Montrer que f est linéaire et écrire la matrice canoniquement associée à f.

Exercice 6 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} xy \\ |x| \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Montrer que f n'est pas linéaire.

Exercice 7 Écrire les applications linéaires matricielles canoniquement associées aux matrices suivantes.

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

(d) $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $f(e_1) = (-1, 1)$, $f(e_2) = (3, 1)$ et $f(e_3) = (1, 0)$.
Déterminer $f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 9 Soit (E_1, E_2) la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ une application linéaire telle que $f(E_1) = \binom{1}{2}$ et $f(E_2) = \binom{1}{-1}$.

Déterminer $f(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 10 Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ une application linéaire telle que $f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(E_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f(E_3) = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 11 Soient $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3y, 2y) \end{array} \right.$.

(a) Montrer que f et g sont linéaires.
(b) Déterminer les matrices A et B canoniquement associées à f et g.
(c) Déterminer les applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 12 Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, y+2z, -z) \end{array} \right.$.

Montrer que f est une application linéaire bijective et que f^{-1} est linéaire.

Exercice 13 Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

(a) Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice A canoniquement associée à f.
(b) Montrer que f est bijective et déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.
(c) Montrer que f^{-1} est linéaire et donner la matrice B canoniquement associée à f^{-1}.
(d) Comparer B et A^{-1}.

Exercice 14 On considère l'application $p : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \frac{1}{5}\begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

Montrer que p est linéaire et prouver que $p \circ p = p$.

Exercice 15 On considère l'application $s : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -5x-6y \\ 4x+5y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

Montrer que s est linéaire et montrer que $s \circ s = Id_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

Exercice 16 Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, -x+y+z, -x-y+3z) \end{array} \right.$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = \lambda.u\}$.
(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, E_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(c) Montrer que $f \circ f = 3f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
(d) En déduire que pour tout $u \in E_\lambda$, $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\, u = 0_{\mathbb{R}^3}$.
(e) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1,2\}, E_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
(f) Déterminer la dimension de E_1.
(g) Déterminer la dimension de E_2.

Exercice 17 Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 2$.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$f((x_1, ..., x_n)) = (x_1, ..., x_n) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v.$$

(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Déterminer $f \circ f$.
(c) Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

On suppose que pour tout $u \in \mathbb{R}^n, f(u) \in \mathrm{Vect}(u)$.
Montrer que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^n, f(u) = \lambda.u$.
Indication : on pourra faire bon usage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Noyau et image

Exercice 19 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array}$.

(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. On donnera une base de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(c) L'application f est-elle injective ? surjective?

Exercice 20 Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & -x+2y+5z) \end{array} \right.$.

(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Déterminer le rang de f.
(c) En déduire la valeur de $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.
(d) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 21 Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (2a+3b-c, a+b+c) \end{array} \right.$.

(a) Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice canoniquement associée à f.
(b) Déterminer le noyau de f, puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(c) Déterminer l'image de f, puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 22 Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+y-3z \\ 3x+2y-4z \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

(a) Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice canoniquement associée à f.
(b) Déterminer le noyau de f, puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(c) Déterminer l'image de f, puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(d) L'application f est-elle bijective?

Exercice 23 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX - X \end{array}$.

(a) Montrer que f est une application linéaire et déterminer la matrice canoniquement associée à f.

(b) Déterminer le noyau de f, puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Déterminer l'image de f, puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le rang de A.
(b) En déduire le noyau de A.
(c) L'application linéaire f canoniquement associée à A est-elle bijective? Si oui, déterminer f^{-1}.

Exercice 25 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le rang de A.
(b) Déterminer le noyau de A et donner une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 26 Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = i+j$.
Déterminer $\mathrm{rg}(A)$.

Exercice 27 Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = i+j+ij$.

Déterminer $\mathrm{rg}(A)$.

Exercice 28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) & \longmapsto & (0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{array}$.

(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire $\mathrm{rg}(f)$.
(c) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$. Déterminer, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la valeur de $\mathrm{rg}\left(f^k\right)$.

Exercice 29 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & (x_n, ..., x_1) \end{array} \right.$.

(a) Montrer que f est linéaire et déterminer $f \circ f$.
(b) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{rg}(f)$.

Exercice 30 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire telle que $f(e_1) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!], f(e_i) = ie_{i-1}$.
(a) Déterminer $\text{Im}(f)$.
(b) Déterminer $\text{Ker}(f)$.
(c) L'application f est-elle injective? surjective?

Exercice 31 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.
(a) Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f \circ f)$.
(b) Montrer que $\text{Im}(f \circ f) \subset \text{Im}(f)$.
(c) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f) \Longleftrightarrow \text{Im}(f \circ f) = \text{Im}(f)$.

Exercice 32 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
(a) Montrer que : f est injective $\Longleftrightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre.
(b) Montrer que : f est surjective $\Longleftrightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^p$.
(c) Montrer que : f est bijective $\Longleftrightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathbb{R}^p$.

Exercice 33 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications linéaires.
(a) Montrer que $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
(b) Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$.
(c) Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.

Exercice 34 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = \text{I}_n$.

Montrer que A est inversible et $B = A^{-1}$.
Indication : considérer les applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ canoniquement associées à A et B.