# TD de mathématiques n°24 : Intégrales impropres, variables aléatoires à densité

## *Intégrales impropres*

**Exercice 1** Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\int_0^{+\infty} 1dt$ (d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ (g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}dt$ (j) $\int_1^{+\infty} t\sqrt{t}dt$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t}dt$ (e) $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ (h) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}dt$ (k) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$

(c) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}dt$ (f) $\int_e^{+\infty} t(\ln t)^2dt$ (i) $\int_0^{+\infty} e^{-5t}dt$ (l) $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$

**Exercice 2** Calculer, si possible, les intégrales généralisées suivantes :

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ (c) $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ (e) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^3}dt$ (g) $\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$ (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt$ (f) $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ (h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt$

**Exercice 3** Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$. Indication : changement de variable $s = \sqrt{t}$.

**Exercice 4** Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. En cas de convergence, calculer $\int_0^{+\infty} t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

**Exercice 5**

(a) Montrer que pour tout $t \geq 1, e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

(b) En déduire que pour tout $x \geq 1, \int_1^x e^{-t^2}dt \leq 1$.

(c) Justifier que la fonction $x \longmapsto \int_1^x e^{-t^2}dt$ est croissante sur $[1, +\infty[$

(d) En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

**Exercice 6** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Déterminer la valeur de $\int_{-1}^1 f(x)dx$. Interpréter graphiquement.

**Exercice 7** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1,1] \end{cases}$.

Déterminer les valeurs de $\int_0^2 f(x)dx$ et $\int_{-2}^2 f(x)dx$. Interpréter graphiquement.

**Exercice 8** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Déterminer la valeur de $\int_{-1}^1 f(x)dx$. Interpréter graphiquement.

**Exercice 9** Calculer les valeurs des intégrales $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \lfloor x \rfloor dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \lfloor x \rfloor dx$. Interpréter graphiquement.

## *Densités de probabilité*

**Exercice 10** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire dont la fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} \text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}$

(a) Montrer que $X$ est une variable aléatoire à densité.

(b) Déterminer une densité de $X$.

(c) Calculer $P([X \geqslant 0]), P([3 \leqslant X \leqslant 5])$ et $P([X < 4])$.

**Exercice 11** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire dont la fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) Montrer que $X$ est une variable aléatoire à densité.

(b) Déterminer une densité de $X$.

(c) Calculer $P([X > 0]), P([-1 \leq X \leq 1])$ et $P([X \leq 2])$.

**Exercice 12** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire dont la fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(a) Montrer que $X$ est une variable aléatoire à densité.

(b) Déterminer une densité de $X$.

(c) Calculer $P([X \geq 0]), P([-3 \leq X \leq 3])$ et $P([X \leq 5])$.

**Exercice 13** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \\ 2x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$.

(a) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

(b) Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité $X$ admettant $f$ pour densité.

(c) Calculer $P\left(\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right), P\left(\left[\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{4}\right]\right)$ et $P\left(\left[X > \frac{9}{10}\right]\right)$.

**Exercice 14** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ |x| & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

(a) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

(b) Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité $X$ admettant $f$ pour densité.

(c) Calculer $P\left(\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right), P\left(\left[-\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right)$ et $P\left(\left[X > \frac{3}{4}\right]\right)$.

(d) Montrer que $X$ admet une espérance et une variance et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice 15** Soit $X$ une variable aléatoire à densité de densité $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < e \\ \frac{1}{x(\ln x)^2} & \text{si } x \geq e \end{cases}$.

(a) Vérifier que $f_X$ est une densité de probabilité.

(b) Déterminer la fonction de répartition de $X$.

**Exercice 16**

(a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \\ ax(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

(b) Soit $X$ une variable aléatoire à densité admettant $f$ pour densité. Déterminer la fonction de répartition $F_X$.

(c) Montrer enfin que $X$ admet une espérance et une variance, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice 17** Soit $a > 0$ et $X$ une variable aléatoire de densité $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-a, a] \\ e^{-|x|} & \text{si } x \in [-a, a] \end{cases}$

(a) Déterminer la valeur de $a$ de sorte à ce que $f$ soit une densité de probabilité.

(b) Déterminer dans ce cas la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

## *Espérance et variance*

**Exercice 18** Soit $k \in \mathbb{R}$ et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité de densité $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = ke^{-|x|}$$

(a) Déterminer la valeur du réel $k$.

(b) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

(c) Montrer que $X$ admet une espérance et une variance et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice 19** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} nt^{n-1} \text{ si } t \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$.

($a$) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on suppose que $f$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

($b$) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

($c$) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice 20** Soit $k \in \mathbb{R}$ et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité de densité $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0,1] \\ \frac{kt}{1+t} & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

($a$) Déterminer la valeur du réel $k$. On pourra observer que $t = 1 + t - 1$.

($b$) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

($c$) Montrer que $X$ admet une espérance et calculer $E(X)$. On pourra observer que $t^2 = t^2 - 1 + 1$.

**Exercice 21** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

($a$) Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.

On suppose dorénavant que la durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire à densité $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant pour densité $f$.

($b$) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

($c$) Montrer que $X$ admet une espérance et une variance et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice 22** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f(t) = e^t e^{-e^t}$.

($a$) Montrer que $f$ est une densité de probabilité. Dans toute la suite, on suppose que $f$ est une densité d'une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

($b$) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

($c$) Est-il plus probable que $X$ prenne des valeurs positives ou négatives?

($d$) On pose $Y = e^X$. Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité admettant une espérance et une variance et déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.

($e$) Proposer un code Python permettant de réaliser une simulation d'une réalisation de $X$, puis affichant le tracé d'un histogramme réalisé à partir d'un million de simulations de $X$ avec 80 classes sur l'intervalle $[-4, 4]$.

**Exercice 23** Soient $x_0 > 0$ et $\alpha > 0$ et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$.

($a$) Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ (on dit que $X$ suit la loi de Pareto de paramètres $\alpha$ et $x_0$ ).

($b$) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

($c$) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $P([X > x])$.

($d$) Soit $x \geq x_0$ et $y \geq 0$. Calculer $P_{[X>x]}([X > x + y])$. Commentaire?

($e$) Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $X$ admet une espérance, à calculer dans ce cas.

## *Lois à densité usuelles*

**Exercice 24** Soit $X$ une variable à densité centrée réduite telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. Déterminer $a$ et $b$.

**Exercice 25** Soit $X$ une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$.

Reconnaître que la variable aléatoire $Y = aX + b$ suit une loi usuelle à expliciter.

**Exercice 26** Un homme jouant aux fléchettes tire sur une cible et reçoit 10 (resp. 5, resp. 3, resp. aucun) points si son tir aboutit à moins de 1 cm du centre de la cible (resp. entre 1 cm et 3 cm du centre de la cible, resp. entre 3 cm et 5 cm du centre de la cible, resp. entre 5 cm et 10 cm du centre de la cible).

Si la variable aléatoire $X$ égale à la distance au centre de la cible pour un tir donné suit la loi uniforme sur $[0, 10]$, déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y$ égale au nombre de points marqués.

**Exercice 27** Une personne doit se rendre à la gare pour prendre le train à 8 h30 et appelle un taxi qui arrive entre 7 h et 8 h à un instant $7 + T$ où $T$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Étant donnée la circulation, la durée $D$ de la course dépend de $T$ via les relations $D = \begin{cases} \frac{3T+5}{6} & \text{si } T \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4T+3}{6} & \text{si } T > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Quelle est la probabilité que la personne rate son train?

**Exercice 28** On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$. On pose $Y = |X|$.

($a$) Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $Y$.

($b$) Montrer que $Y$ admet une espérance et une variance et déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.

**Exercice 29** On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$. On pose $Y = X^2$.

($a$) Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $Y$.

($b$) Montrer que $Y$ admet une espérance et une variance et déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.

**Exercice 30** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

($a$) Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $Y = \frac{1}{\lambda}X$, alors $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

($b$) Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y = \lambda X$, alors $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

**Exercice 31** Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

($a$) Que peut-on dire de l'évènement $[X = 1]$ ?

($b$) On pose $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$. Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité et reconnaître sa loi.

**Exercice 32** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = -X$.

Déterminer la loi de $Y$.

**Exercice 33** Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$.

Indication : on pourra considérer le changement de variable $s = \sqrt{2t}$.

**Exercice 34** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = |X|$.

($a$) Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $Y$.

($b$) Montrer que $Y$ admet une espérance et calculer $E(Y)$.

($c$) Montrer que $Y$ admet une variance et calculer $V(Y)$.