# Complément sur les espaces vectoriels et introduction au chapitre 23.

ECG1 A, Lycée Hoche

## Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base

**Définition 1.** Soit $E$ un espace vectoriel. Supposons donné une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ de $E$.
Pour tout vecteur $x \in E$, il existe d'uniques réels $x_1, \dots x_n$ (appelées coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{B}$) tels que :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

On appelle alors ***matrice des coordonnées de*** $x$ ***dans la base*** $\mathcal{B}$ la matrice colonne notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et donnée par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Idée : cet outil nous permettra progressivement d'étudier tout espace vectoriel de dimension finie (i.e., admettant une "base finie", donc une base avec nos définitions) en se ramenant à des problèmes matriciels.

## Les espaces vectoriels de référence

### Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Il ont été étudiés lors du chapitre 17.

Penchons nous à nouveau sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ à travers quelques exercices.

**Exercice 2.** On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Soit $F$ l'ensemble :

$$F = \{(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3 | \lambda X_1 + \mu X_2 + \gamma X_3 = 0_{3,1}\}.$$

$(i)$ Donner un élément de $F$.

$(ii)$ Donner un autre élément de $F$.

$(iii)$ As-t-on $(2, -1, 3) \in F$ ?

$(iv)$ Montrer que $F$ est l'ensemble de solutions d'un système linéaire homogène. *On en déduit que c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*, par un théorème du cours.*

$(v)$ Déterminer une base de $F$ ainsi que sa dimension.

$(vi)$ Représenter $F$ dans un repère orthonormé à 3 axes (en perspective).

**Exercice 3.** On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

$(i)$ Donner la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice des coordonnées de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base.

$(ii)$ On pose $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (2, 2, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$(iii)$ Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((1, 2, 3))$.

$(iv)$ Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((x, y, z))$ en fonction de $x$, $y$ et $z$.

*Commençons à parler d'applications linéaires.*

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x + z) \end{array}$.

$(v)$ Montrer que $f$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v). \qquad (P)$$

On dit que $f$ est une **application linéaire**.

$(vi)$ Montrer que $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^2}$ en revenant à la définition de $f$, puis en utilisant uniquement la propriété de linéarité de $f$.

$(vii)$ Montrer que l'ensemble $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in \mathbb{R}^3 | f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en revenant à la définition de $f$, puis en utilisant uniquement la propriété de linéarité $(P)$ de $f$.

***On dira que*** $\mathrm{Ker}(f)$ ***est le noyau de l'application linéaire*** $f$.

$(viii)$ Soit $\mathcal{C}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(f(v)) = A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v).$$

On remarque que la connaissance de cette matrice $A$ permet de retrouver entièrement $f$, car un vecteur est uniquement déterminé par la matrice de ses coordonnées dans une base donnée.

On dira que $A$ est la ***matrice de*** $f$ ***dans les bases canoniques de*** $\mathbb{R}^2$ ***et*** $\mathbb{R}^3$.

$(ix)$ Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que l'on déterminera, telle que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(g(v)) = A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v).$$

On peut très facilement vérifier que $g$ est linéaire. On dira que $g$ est ***l'application linéaire associée à*** $A$ ***dans la base canonique de*** $\mathbb{R}^2$.

On verra plus généralement que les application linéaires (les applications vérifiant la propriété $(P)$ entre espaces vectoriels de dimension finie, i.e. admettant une base) sont exactement les applications données par une matrice avec le procédé décrit ci-dessus.

**Définition 4.** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application.
On dit que $f$ est une application ***linéaire*** si :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in R^2, f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v).$$

**Remarque.** À gauche de l'égalité, les opérations $+$ et $\cdot$ sont effectuées dans l'espace vectoriel $E$. À droite, elles le sont dans $F$.

**Remarque.** Dans le cours, on adoptera une définition légèrement différente (la "définition" ci-dessus sera une caractérisation).

## L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls.

Muni des opérations matricielles "+" (somme de matrices) et "$\cdot$" (produit d'une matrice par un réel), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à $n$ lignes et $p$ colonnes est un espace vectoriel.

Cet espace vectoriel admet une base appelée la base canonique.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, notons $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient d'indice $(i,j)$ qui vaut 1.

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la base :

$$(E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{1,p}, E_{2,1}, E_{2,2}, \ldots, E_{2,p}, \ldots, E_{n,1}, E_{n,2}, \ldots, E_{n,p}).$$

Elle est de cardinal $np$ donc $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$.

Par exemple, pour $n = p = 2$, on obtient la base suivante :

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Exercice 5.** Vérifier que la famille de vecteurs ci-dessus est bien une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 6.** Montrer que $\left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 7.** $(i)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$(ii)$ On pose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathcal{C}_A$ et donner sa dimension.

On va maintenant voir d'autres espaces vectoriels classiques.

## L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes. Alors,

$$P + Q : x \mapsto P(x) + Q(x)$$

est également un polynôme. De plus, pour tout réel $\lambda$,

$$\lambda \cdot P : x \mapsto \lambda \times P(x)$$

est également un polynôme.

**Exercice 8.** Donner deux exemples.

**Proposition 9.** *Muni de ces opérations + et $\cdot$, l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels est un espace vectoriel.*

Rappel : cela signifie que toutes les propriétés de la proposition et définition 3 du chapitre 17 sont vraies pour les polynômes.

Le ***polynôme nul*** est simplement la fonction nulle $0_{\mathbb{R}[X]} : x \mapsto 0$.

**Proposition 10.** *L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de base de cardinal fini. On dit que c'est un espace vectoriel de dimension infinie (HP).*

**Démonstration.** À noter. $\square$

Pour cette raison, le programme nous fait plutôt travailler avec :

## L'espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $P$ et $Q$ deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, et $\lambda, \mu$ deux réels. Alors :

$$\deg(\lambda P) = \Big\{ \qquad\qquad \leq n.$$

et de même, $\deg(\mu Q) \leq n$.

D'après les propriétés du degré :

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg(\lambda Q)) \leq n.$$

De plus, $0_{\mathbb{R}[X]} \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est bien une partie de $\mathbb{R}[X]$.

Ceci démontre la :

**Proposition 11.** *$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

En particulier, $\mathbb{R}_n[X]$ **est un espace vectoriel**, muni de l'addition des polynômes et du produit d'un polynôme par un réel.

**Proposition 12.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. En particulier, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.*

**Démonstration.** En exercice : c'est le théorème d'unicité des coefficients. $\square$

**Exercice 13.** Déterminer la matrice des coordonnées de $1+2X+X^2$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

**Exercice 14.** Montrer que $\mathcal{B} = (X-1, X^2-X, X^2+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice des coordonnées de $1+X$ dans cette base.

**Exercice 15.** (HP) On note toujours $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $D$ la dérivation vue comme application $D : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

$(i)$ Déterminer les matrices des coordonnées de $D(1)$, $D(X)$ et $D(X^2)$ dans la base $\mathcal{C}$. On notera ces matrices colonnes respectivement $C_1, C_2$ et $C_3$.

$(ii)$ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre, $C_1$, $C_2$ et $C_3$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(D(P)) = A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P).$$

$(iii)$ L'application $D$ est-elle linéaire ?

L'idée à retenir est la suivante :

La correspondance entre matrices et applications linéaires entrevue dans l'exercice 3 est valable dans un cadre très général : celui des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

## L'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Soit $I$ un intervalle réel.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions réelles $I \to \mathbb{R}$ (dont le domaine de définition est $I$, pas seulement "définies sur $I$).

On dispose d'opérations d'espaces vectoriels sur cet ensemble, définies par :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

et

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \times f(x)$$

(où $f$, $g$ sont des éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda$ un réel).

Le vecteur nul est ici $0_{\mathcal{F}(I,\mathbb{R})} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$.

L'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ainsi obtenu est de dimension infinie... Mais on peut tout de même constater quelques points.

A quelles propriétés du cours ces propositions font-elles références ?

**Proposition 16.** *L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions $I \to \mathbb{R}$ continues sur $I$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.*

Réponse :

**Proposition 17.** *Soient $a$ et $b$ deux éléments de $I$. Considérons l'application $\phi$ : $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$. Alors, $\phi$ est linéaire :*

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}(I, \mathbb{R}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \phi(f) + \mu \phi(g).$$

Réponse :

**Proposition 18.** *L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des fonctions $I \to \mathbb{R}$ dérivables sur $I$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.*

Réponse :

**Proposition 19.** *Considérons l'application $D$ : $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$. Alors, $D$ est linéaire :*

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{D}(I, \mathbb{R}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g).$$

Réponse :

Pour finir, un petit calcul dans cet espace vectoriel.

**Proposition 20.** *Soit* $(E) : y'' + ay' + by = 0$ *une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants définie sur un intervalle* $I$ *non trivial (non vide, non réduit à un point). Supposons le discriminant de son équation caractéristique strictement positif, et soient* $\alpha$ *et* $\beta$ *ses deux solutions.*
*Notons* $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \end{array} \right.$ *et* $g : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\beta x} \end{array} \right.$.
*Alors, l'ensemble* $\mathrm{Sol}(E)$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ *de dimension 2, dont* $(f, g)$ *est une base.*