Programme de colle n^o 3 : Fonctions réelles de la variable réelle (suite).

Semaine du lundi ***2 octobre****.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Suite du chapitre 2

3.1 Comportement des propriétés des fonctions vis à vis des opérations : somme de deux fonctions toutes les deux croissantes, décroissantes (resp. strictement...), paires, impaires, majorées minorées ou bornées. Composition et monotonie, composition et parité, composition par une fonction majorée, minorée ou bornée.

La liste exhaustive de tous les énoncés vrais de ce type n'a pas été donnée (ex : produit et parité), les élèves doivent s'entrainer à les retrouver au besoin.

3.2 Rappels sur la dérivation : définition, dérivation et opérations. Caractérisation par la dérivée de la monotonie, des fonctions constantes. Condition suffisante de monotonie stricte pour une fonction dérivable, sur un intervalle. Condition nécessaire d'extremum local pour une fonction dérivable, sur un intervalle ouvert. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable en un point.

Aucune démonstration dans cette partie.

3.3 Ensemble image $f(D)$ d'une partie D de $\mathbb{R}$ par une fonction f définie sur D. Lien avec la recherche d'antécédents. Ensemble image d'un segment par une fonction continue et monotone sur ce segment. Toute fonction dérivable sur un intervalle y est continue. Injectivité et nombre d'antécédents. Si f est continue et strictement monotone sur un segment $[a,b]$ ($a \leq b$), alors pour tout réel y : y admet un antécédent sur $[a,b]$ par f ssi $y \in [f(a), f(b)]$ (si f str. croissante, sinon inverser les bornes), et dans ce cas, y admet un unique antécédent sur $[a,b]$ par f.

Cette partie a pour but de permettre aux élèves l'utilisation du tableau de variation dans la recherche d'antécédents ou d'un ensemble image, sans exposer précisément le théorème de la bijection monotone. Aucun détail n'a été donné sur la continuité, à part qu'une fonction dérivable sur un intervalle y est continue. On s'est restreint au cas d'un segment pour faciliter les énoncés et éviter l'utilisation de limites, mais on pourra guider une démarche plus générale en colle.

3.4 fonctions usuelles et leurs propriétés (éventuelle définition, domaine de définition, de dérivabilité, dérivée, monotonie): fonctions polynômiales, fonction inverse, exponentielle, logarithme, racine carrée, puissances généralisées, valeur absolue et partie entière.

Les règles de manipulations de l'exponentielle, du logarithme, de la racine carrée (incluant la quantité conjuguée) et des puissances (éventuellement généralisées) ont été rappelées. Les puissances généralisées non entières admettent toutes pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$.

Python

3.5 Types et leurs opérations ("méthodes") : `int, float, str, bool, tuple, list`. Affectation de variables, boucles `for` utilisant `range` ou une liste, test conditionnels. Calculs de sommes et de produits. Importation `import numpy as np` de `numpy` et utilisation du préfixe "`np.`" pour appeler ses objets. Objets `numpy` donnés : `e, pi, sqrt, exp, log, log10, floor, ceil`.

Aucune utilisation de `log10` *et* `ceil` *n'est attendue.*

Quelques questions de cours

1. Démontrer que la proposition suivante est vraie (au choix de l'interrogateur) : Si f est *(propriété)* et g est *(propriété)*, alors ($g \circ f$, $g+f$, gf, $g-f$, ou $\frac{f}{g}$) est *(propriété)*, pour des propriétés *(propriété)* de monotonie, de parité ou liées aux bornes. *Exemple : si f et g sont majorées sur D, alors $f+g$ est majorée sur D.*
2. Étudier la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ jusqu'à donner son tableau de variation.
3. Définir la notion de tangente à la courbe d'une fonction en un point de dérivabilité de cette fonction. Définir la racine carrée d'un réel positif, en démontrant tout résultat nécessaire.
4. Soit x et r deux réels. Donner une proposition équivalente aux propositions suivantes n'utilisant pas de valeur absolue : $|x| = r$, $|x| \leq r$. On prendra garde au signe de r. Même question pour la partie entière, avec cette-fois ci r un entier et les propriétés : $\lfloor x \rfloor \leq r$, $\lfloor x \rfloor = r$. *L'interrogateur pourra changer la nature des inégalités.* Enfin, résoudre $|x - \dfrac{2}{3}| \leq 2$ (l'interrogateur pourra changer les constantes, la nature de l'inégalité, et/ou remplacer la valeur absolue par une partie entière).
5. Soit x un réel. Définir la notation x^α pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{<0}$ puis $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (on précisera, dans chaque cas, toute contrainte sur le réel x). Donner, avec démonstration, la dérivée de $t \mapsto t^\alpha$ dans le dernier cas.
6. Étudier les bornes et extrema de la fonction donnée sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.
7. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \ln(1+t) \leq t$. En déduire que $f : x \mapsto e^{-x}\ln(1+e^x)$ est (définie et) bornée sur $\mathbb{R}$.
8. Écrire un programme `Python` permettant de calculer le 100-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2^n + n \end{cases}.$$