

Chapitre 0 : Premières résolution d'équations et d'inéquations (cours/TD)

ECG1 A, Lycée Hoche

Le but de ce premier document est d'apprendre à résoudre équations et inéquations les plus simples. On y voit les méthodes les plus basiques, les éléments indispensables à une bonne résolution et la manière dont la rédaction s'en trouve structurée.

Au fur et à mesure de l'année, nous verrons des méthodes permettant de résoudre d'autres équations et inéquations : utilisation de la monotonie (croissance et décroissance), de la stricte monotonie ou de l'injectivité de fonctions.

Ces résolutions d'équations et inéquations sont omniprésentes en mathématiques, il est nécessaire d'acquérir de bons réflexes au plus vite.

I. Structure générale d'une résolution

1. Notion d'équation, d'inéquation

Exemple 1. Voici quelques exemples d'équations.

(i) L'équation $(E) : 2x + 1 = 3x - 2$, d'inconnue réelle x .

(ii) L'équation $(F) : \frac{2x+1}{x-1} = x$ d'inconnue réelle x .

(iii) L'équation $(G) : t^2 + 2t + 1 = 0$, d'inconnue réelle t .

(iv) Fixons un réel a . On peut alors considérer l'équation $(E_a) : \ln(1+x) = a$ d'inconnue réelle x .

Remarque. On identifie dans une équation...

- Une égalité entre des expressions...
- ... dépendant d'une variable appelée l'inconnue, qui est spécifiée.
- Le "nom" choisi de l'inconnue n'a aucune importance : on peut dire par exemple que l'équation (E) du premier exemple est aussi «l'équation $2t + 1 = 3t - 2$ d'inconnue réelle t ». On ne change nullement (E) en la décrivant ainsi, la lettre x (ou t dans le second exemple) n'est utilisée que pour décrire l'équation (E) . La seule limitation à cela est qu'on n'a pas le droit d'utiliser un symbole déjà attribué pour désigner la variable.
- L'équation (E_a) de l'exemple (iv) dépend d'un réel a arbitrairement fixé au préalable. On doit s'attendre à ce que la résolution de (E_a) dépende de la valeur de a , et toutes les valeurs possibles de a doivent être considérées lorsque l'on cherche à résoudre (E_a) .
Par exemple, on résoudra dans la même démarche $(E_1) : \ln(1+x) = 1$ et $(E_7) : \ln(1+x) = 7$ (d'inconnue réelle x).

Pour finir, lorsqu'on traite une équation, on doit d'abord se demander "pour quelles valeurs de l'inconnue les expressions intervenant dans l'équation existent". On dira qu'on recherche le domaine de définition de l'équation : par exemple, l'équation (E) admet pour domaine de définition $\mathbb{R}$ tandis que l'équation (F) admet pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Remarque. Dire qu'une équation est vraie ou fausse n'a aucun sens. Vous pouvez penser à la donnée d'une équation comme à la donnée d'un problème à résoudre (déterminer l'ensemble de ses solutions), dont la réponse est l'ensemble des valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'égalité donnée est vraie ou fausse.

Définition 2. On appelle *équation* (réelle) la donnée d'une égalité faisant intervenir une (ou des) variable(s) réelle(s), appelée(s) *inconnues*. On appelle *domaine de définition* d'une équation l'ensemble des valeurs de la (des) variable(s) pour lesquelles les expressions intervenant dans cette équation sont bien définies.

Remarque. Pour commencer, on se concentrera sur les équations et inéquations avec une seule inconnue. Voici un exemple d'équation à deux inconnues réelles x et y :

$$2x + 3y = 1.$$

Nous rencontrerons de telles équations dans les chapitres liés aux systèmes linéaires.

Le couple $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$ est une solution de cette équation.

Le couple $(x, y) = (1, -\frac{1}{3})$ en est une autre.

En remplaçant le symbole d'égalité par l'un des symboles d'inégalité, on obtient la notion d'inéquation.

Définition 3. On appelle *inéquation* (réelle) la donnée d'une inégalité faisant intervenir une (ou des) variable(s) réelle(s), appelée(s) *inconnues*. On appelle *domaine de définition* d'une inéquation l'ensemble des valeurs de la (des) variable(s) pour lesquelles les expressions intervenant dans cette inéquation sont bien définies.

Exemple 4. Voici quelques inéquations, toutes d'inconnue réelle x .

(i) $(I) : 2x + 1 > x^2.$

(ii) $(J) : e^{2x+1} \geq 3.$

(iii) $(K) : x^2 - 3x - 1 < 0.$

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'à des équations et inéquations à une inconnue.

2. Recherche du domaine de définition

Remarque. Évaluer une variable en une valeur, c'est remplacer la variable par cette valeur. On parle aussi de substitution (substituer 1 à la variable x , c'est simplement remplacer x par 1).

Remarque. Le *domaine de définition* (appelé aussi l'ensemble de définition) d'une équation (ou inéquation) est donc l'ensemble des valeurs en lesquelles on peut évaluer l'inconnue pour que l'égalité (ou inégalité) ait du sens, qu'elle soit vraie ou fausse. Par exemple :

(i) $2 < 1$ est une inégalité qui a du sens et qui est fausse. Donc 1 appartient au domaine de définition de l'équation $x + 1 < 1$. On dira en revanche que 1 n'est pas solution de cette équation.

(ii) $\sqrt{-1} = 1$ est une égalité mal définie (qui n'a pas de sens), car la fonction racine carrée n'est pas définie en -1 . Donc le réel -1 n'appartient pas au domaine de définition de l'équation $\sqrt{x} = 1$.

Exemple 5. (i) L'équation $(E) : x^2 = x - 1$ d'inconnue réelle x a pour ensemble de définition l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. En effet, les expressions x^2 et $x - 1$ sont définies pour tout réel x .

(ii) L'équation $\frac{x+2}{x-1} = 2$ d'inconnue réelle x a pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. En effet, la division par $x - 1$ dans le membre de gauche de l'égalité rend l'expression non définie si $x = 1$.

(iii) Voici à quoi ressemble la justification du dernier point :

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
- $x + 2$ et $x - 1$ sont des expressions bien définies,
- donc par quotient l'expression $\frac{x+2}{x-1}$ est bien définie si et seulement si ("*si et seulement si*" exprime une équivalence) $x - 1 \neq 0$ (on ne peut pas diviser par 0).
- Or, $x - 1 = 0 \iff x = 1$ (on ajoute 1 des deux côtés).
- Donc $\frac{x+2}{x-1}$ est bien définie ssi (abréviation de "*si et seulement si*") $x \neq 1$.
- De plus, 2 est bien défini (le second membre n'ajoute pas de contrainte).
- Donc finalement, l'égalité $\frac{x+2}{x-1} = 2$ est bien définie si et seulement si $x \neq 1$.
- Donc l'équation (E) a pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Remarque. Terminologie : Pour signifier qu'une partie D de $\mathbb{R}$ trouvée (par exemple, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans l'exemple précédent) est le domaine de définition d'une équation (E) étudié, on peut dire...

- L'équation (E) a pour domaine de définition D .
- Le domaine de (E) est D .
- L'équation (E) est définie **sur** D .

Attention, considérer "l'équation $(E) : \frac{x+2}{x-1} = 2$ d'inconnue réelle x " ne signifie pas que son domaine est $\mathbb{R}$ en entier : on spécifie "inconnue réelle" pour dire que l'inconnue est un nombre réel, pas pour spécifier le domaine de (E) . L'inconnue pourrait être un entier par exemple, ou des objets plus compliqués : une fonction, une matrice...

Remarquez aussi qu'à ce stade, nous n'avons pas encore parlé de la notion de solution d'une équation.

Exemple 6. (i) L'inéquation $(E) : x^2 \leq x - 1$ d'inconnue réelle x est définie sur $\mathbb{R}$ car les expressions x^2 et $x - 1$ sont définies pour tout réel x . On peut dire que l'inéquation (E) d'inconnue réelle x est **définie sur** $\mathbb{R}$, ou que l'inéquation $x^2 = x - 1$ (d'inconnue réelle x) admet pour domaine de définition $\mathbb{R}$.

(ii) L'inéquation $\ln(x) > 2$ d'inconnue réelle x est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En effet :

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
- L'expression $\ln(x)$ est bien définie ssi $x > 0$ (d'après le domaine de définition de la fonction logarithme).
- De plus, 2 est bien défini (le second membre n'ajoute pas de contrainte).
- Donc finalement, l'inéquation $\ln(x) > 2$ d'inconnue réelle x est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Résolution d'une équation ou inéquation

Définition 7. Soit (E) une équation (respectivement une inéquation) à une inconnue réelle. Notons $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

- (i) On appelle **solution de** (E) tout réel $x \in \mathcal{D}$ tel que l'égalité (respectivement, l'inégalité) obtenue en substituant la valeur x à l'inconnue est vraie.
- (ii) On appelle **ensemble des solutions** de (E) l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ qui sont solutions de (E) .
- (iii) **Résoudre** (E) , c'est déterminer l'ensemble des solutions de (E) .

Remarque. Ainsi :

- (i) Pour déterminer si un réel donné t est solution d'une équation ou inéquation (E), il suffit de faire prendre la valeur t à l'inconnue et de constater si l'égalité ou inégalité est vraie.
- (ii) Résoudre une équation ou inéquation (E) est plus complexe : il s'agit de déterminer toutes ses solutions (et de les donner sous la forme d'un ensemble).

Exemple 8. (i) 2 est-il solution de $x^3 + x - 10 \geq 0$? On commencera par remarquer que cette inéquation est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(ii) 3 est-il solution de $\frac{x+1}{x-2} = 2$?

(iii) -1 est-il solution de $\ln(x) = 1$?

(iv) Résolvons l'équation $x + 1 = 3x - 3$.

Étapes de résolution d'une équation ou inéquation

La résolution d'une équation ou inéquation se déroule systématiquement en trois étapes.

- (i) La détermination du **domaine de définition** de l'équation. On examine les expressions qui interviennent, on identifie toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles ces expressions sont bien définies. Autre manière de le dire : on cherche les "valeurs interdites" (faire disparaître cette expression à l'écrit).
- (ii) La **résolution** de l'équation. On cherche toutes les solutions de l'équation ou inéquation. Pour cela, on s'aide de calculs, d'arguments d'analyse (ex : étude de fonction) et de logique.
- (iii) La rédaction d'une **Conclusion**, dans laquelle on donne proprement l'ensemble des solutions recherché.

Exemple 9. (et modèle de rédaction.) Résolvons l'équation $\frac{2x+1}{x-2} = 3$.

Exemple 10. (et modèle de rédaction.) Résolvons l'équation $\frac{x+1}{x-1} > 1$.

Il ne faut pas oublier de vérifier que les solutions trouvées appartiennent bien au domaine de définition !

Exemple 11. (et modèle de rédaction.) Résolvons l'équation $\frac{2x-2}{x-1} = 1$.

Remarque. (i) Il est courant de nommer par une lettre le domaine de définition et l'ensemble des solutions d'une équation, pour s'en servir plus tard par exemple. Mais vous devez choisir la lettre. Deux formulations utiles, pour donner votre réponse tout en nommant ces objets : "L'ensemble de définition de cette équation est donc $\mathcal{D} = \dots$ ", "L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \dots$ ".

- (ii) Le symbole " $\iff$ " est le symbole d'équivalence mathématique. Il se lit "équivalent à", et ne doit pas être utilisé comme une abréviation dans une phrase en français. **Mis entre deux propositions**, il exprime que l'une est vraie exactement quand l'autre l'est. Par exemple, pour tout réel x :

$$x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

Attention, ici on ne dit pas que : "pour tout réel x , $x + 1 = 0$ est vrai et $x = -1$ est vrai" (ceci est très faux).

- (iii) Il se peut qu'une équation/inéquation n'ait pas de solutions. Dans ce cas, l'ensemble de ses solutions est **l'ensemble vide**, noté $\emptyset$.
- (iv) Pensez à vous relire : si vous trouvez un petit nombre de solutions, vérifiez au brouillon qu'elles conviennent.

II. Résolution d'équations

Premières techniques de résolution d'équations

Voici les premières opérations qu'on utilisera (systématiquement) pour résoudre des équations. A partir d'une égalité, on obtient **une égalité équivalente** en :

- (i) **ajoutant** une même expression à chaque membre de l'égalité.

Exemple : Pour tout réel x ,

$$x + 1 = 2x - 1 \iff x + 1 - 1 = 2x - 1 - 1 \iff x = 2x - 2.$$

- (ii) **multipliant** chaque membre de l'égalité par un même réel **non-nul**.

Exemple : Pour tout réel x ,

$$2x = 1 \iff 2x \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{2}.$$

- (iii) En **appliquant** une même **fonction strictement monotone** à chaque membre d'une égalité, sous réserve que cette fonction soit bien définie en ces valeurs. Par exemple, on pourra appliquer la fonction exponentielle, la fonction logarithme si chaque membre de l'égalité est strictement positif, la fonction racine carrée si chaque membre de l'égalité est positif...

Exemple : Pour tout réel x strictement positif,

$$\ln(x) = 37 \iff e^{\ln(x)} = e^{37} \iff x = e^{37}.$$

De plus, on cherche souvent à ramener une équation sous la forme "... = 0". Une fois ceci fait, on peut utiliser :

- (iv) La règle du **produit nul**.

Exemple : Pour tout réel t ,

$$(t - 1)(t + 4) = 0 \iff t - 1 = 0 \text{ ou } t + 4 = 0.$$

- (v) Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

Exemple : Pour tout réel a tel que $a \neq 2$,

$$\frac{a^2 + a + 1}{a - 2} = 0 \iff a^2 + a + 1 = 0.$$

Enfin, pour résoudre les équations du second degré (comme $2x^2 + 3x - 1 = 0$), on utilise la méthode du **discriminant**.

Cette liste sera complétée au fur et à mesure de l'année (notions de fonctions monotones, strictement monotones, injectives, utilisation de la continuité...)

Exercice 12. Résoudre (proprement) chacune des équations suivantes.

a) $\frac{2}{3}x - 2 = \frac{1}{2}x + 2$

b) $\frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{4}$

c) $\frac{x-2}{x+2} = -3$

d) $\frac{5x-2}{2x+2} = 2$

e) $3 + \frac{2}{x-1} = 5$

f) $2x^2 = -x$

g) $x^2 = 3$

h) $x^2 = -x + 2$

i) $x^2 = -x - 1$

j) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

k) $x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{15}{8} = 0$

l) $x^2 - 2x - 4 = 0$

m) $(x-1)(x^2+2x-1) = 0$

n) $\frac{x+2}{x-1} = 2x$

o) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{x+1}{x-1}$

p) $\frac{3x-2}{x^2-1} = 0$

q) $1 - \frac{2}{x^2+2} = x$

r) $\frac{x^2+x-2}{x-1} = 0$

s) $\ln(x) - \ln(x-1) = 1$

t) $\ln(x + \frac{1}{x}) = \ln(3)$

u) $\ln(4x - 3x^2) = 0$

v) $e^{2x^2+1} = \frac{1}{e^{2x}}$

w) $\frac{e^x - 1}{e^x + 2} = \frac{1}{2}$

III. Résolution d'inéquations

Premières techniques de résolution d'inéquations

À partir d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente en :

- (i) **ajoutant** une même expression à chaque membre de l'inégalité.

Exemple : Pour tout réel x ,

$$x + 1 < 2x - 1 \iff x + 1 - 1 < 2x - 1 - 1 \iff x < 2x - 2.$$

- (ii) **multipliant** chaque membre de l'inégalité par un même réel **strictement positif** (donc non nul).

Exemple : Pour tout réel x ,

$$2x \geq 1 \iff 2x \cdot \frac{1}{2} \geq 1 \cdot \frac{1}{2} \iff x \geq \frac{1}{2}.$$

- (iii) **multipliant** chaque membre de l'inégalité par un même réel **strictement négatif** (donc non nul) et en **changeant le sens** de l'inégalité.

Exemple : Pour tout réel x ,

$$\frac{x}{-2} \geq 1 \iff -2 \cdot \frac{x}{-2} \leq -2 \cdot 1 \iff x \leq -2.$$

- (iv) En appliquant une fonction **strictement croissante** (comme l'exponentielle, le logarithme ou la racine carrée) de chaque côté de l'inégalité, sous réserve que cette fonction soit bien définie en ces points.

De plus, on cherche souvent à ramener une inéquation sous la forme d'une inéquation avec un membre nul (par exemple, $x^2 \geq x \iff x^2 - x \geq 0$). Une fois ceci fait, on peut utiliser :

- (i) La **règle des signes** pour déterminer le signe d'un produit. Pour cela, on dresse très souvent un **tableau de signes**.

Exemple : Résolvons l'inéquation définie sur $\mathbb{R}$ par $x^2 \leq x$. Pour tout réel x :

$$x^2 \leq x \iff x^2 - x \leq 0 \iff x(x - 1) \leq 0.$$

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
x		-	0	+		
$x-1$		-	-	0	+	
$x(x-1)$		+	0	-	0	+

Ainsi, $x^2 \leq x \iff x(x - 1) \leq 0 \iff x \in [0, 1]$.

Donc l'ensemble des solutions de $x^2 \leq x$ est l'ensemble $[0, 1]$.

- (ii) Utiliser à nouveau un tableau de signe pour résoudre les inéquations du second degré (en passant par le discriminant).

Remarque. Attention, quand on construit un tableau de signe, les signes donnés sont stricts : il faut déterminer toutes les valeurs d'annulation de nos expressions, et les inscrire.

Exercice 13. Résoudre (proprement) chacune des inéquations suivantes.

a) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}x - 2$

f) $\frac{x^2}{3} > 5$

k) $\frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{x-2}$

b) $(x-2)(2x+1) < 0$

g) $x^2 - 4x - 3 < 0$

l) $\frac{2x}{x^2-1} \leq 2x$

c) $\frac{x-2}{2x+3} \geq 1$

h) $2x \geq x^2 + 2$

m) $\ln(\ln(x)) > 0$

d) $\frac{x+1}{x} < 1$

i) $x^2 - 2x - 1 \leq 0$

n) $\frac{1-x}{1+x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 0$

e) $x^2 \leq -x$

j) $\frac{3x-2}{2-x} \geq 1 - 2x$

o) $e^{-x^2} < e^{-(x+1)^2}$

p) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \frac{1}{2}$

q) $2e^{-4x^2} \geq e^{-x^2}$

Attention, calculs...

Vous devez, au plus vite, être à l'aise avec :

- (i) Les calculs avec les fractions,
- (ii) Les calculs avec les puissances,
- (iii) Les propriétés des fonctions logarithmes et exponentielles. Exemple :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a e^b$$

Attendez-vous à une interro !

Exercice 14. Entraînement. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

(i) $A = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)$

(ii) $B = \frac{\frac{4}{3} - 5}{\frac{3}{4}}$

(iii) $C = 2^3 \times 4^{-2}$

(iv) $D = \frac{2^{-2} 4^3 5^4 3^7}{2^8 5^{-3}}$

(v) $E = \ln(\sqrt{e^4}) + \ln(\sqrt{e^2})$

(vi) $F = \ln\left((2 + \sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2 - \sqrt{3})^{20}\right)$

(vii) Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression $G = (x - 1)(2x^2 + 4x) - (3x - 2)(x - 1)$

IV. Quelques techniques supplémentaires

1. Énoncés

Voici quelques équations et inéquations faisant intervenir la valeur absolue et la racine carrée.

Exercice 15. (i) Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} = x$.

(ii) Résoudre les inéquations :

(a) $|4 - 2x| \leq 8$.

(b) $|x^2 - 1| > 2$.

Dans l'exercice ci-dessous, on se confronte à des équations nécessitant un changement de variables, et à des équations à paramètres.

Exercice 16. (i) Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre (en fonction de m) l'équation $x^2 + x + m(x - 1) = 0$ d'inconnue réelle x .

(ii) (a) Résoudre l'équation $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

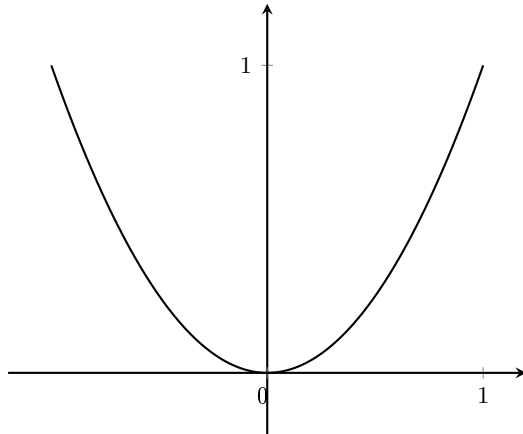
(b) Résoudre l'équation $x - \sqrt{x} - 2 = 0$.

(iii) Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre (en fonction de m) l'équation (E) : $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = m$, d'inconnue réelle x .

2. Correction

Exercice 15 (i)

Idée : Sur le brouillon, on veut vraiment mettre cette égalité au carré pour faire disparaître la racine. Malheureusement, on n'obtient pas une égalité équivalente en mettant une égalité au carré en toute généralité.



La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Or, c'est souvent (disons : à première vue) la monotonie stricte qui nous permet d'appliquer une fonction à une (in)égalité pour obtenir une (in)égalité équivalente.

Ainsi, si on veut appliquer cette fonction dans une résolution d'(in)équation, on doit prendre garde à bien utiliser l'une de ces monotonie stricte. Gardez bien en tête :

L'équivalence $1 = -1 \iff 1^2 = (-1)^2$ est fausse.

Plus précisément, on va utiliser la proposition suivante :

Proposition : Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et strictement monotone sur I . Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, a = b \iff f(a) = f(b).$$

Pour pouvoir utiliser la fonction carré, on sépare donc la résolution en deux parties afin d'élever au carré une égalité dont les deux membres ont le même signe.

Notons (E) l'équation $\sqrt{x+1} = x$ d'inconnue réelle x , et D son domaine.

Soit x un réel.

$\sqrt{x+1}$ est bien défini si et seulement si $x+1 \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq -1$. Ainsi, $D = [-1, +\infty[$.

Résolvons maintenant (E) .

Résolution sur $\mathbb{R}_+$:

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Par croissance *stricte* de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et vu que $x \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt{x+1} \in \mathbb{R}_+$ (toute racine carrée est positive), on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} = x &\iff (\sqrt{x+1})^2 = x^2 \\ &\iff x+1 = x^2 \\ &\iff x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

.

Enfin, le polynôme $X^2 - X - 1$ admet pour discriminant $5 > 0$ donc ses racines sont $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Attention, ici on cherche les solutions de (E) appartenant à $\mathbb{R}_+$.

Enfin, il est clair que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 0$ (comme somme puis quotient de nombres positifs).

D'autre part, $\sqrt{5} > 1$ (car $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $(\sqrt{5})^2 > 1^2$ et $(\sqrt{5}, 1) \in (\mathbb{R}_+)^2$).

Donc $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$.

Finalement, x est solution de (E) si et seulement si $x = x_1$ ou $x = x_2$, et $\begin{cases} x_1 \in \mathbb{R}_+ \\ x_2 \notin \mathbb{R}_+ \end{cases}$.

Conclusion partielle : (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, donnée par $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Résolution sur $] -1, 0[$:

Soit $x \in] -1, 0[$.

Dans ce cas, l'égalité $\sqrt{x+1} = x$ est fausse car $x < 0$ et $\sqrt{x+1} \geq 0$. Donc x n'est pas solution de (E) .

Conclusion partielle : (E) n'admet pas de solution sur $] -1, 0[$.

Conclusion : on a donc montré que l'unique solution de (E) est $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 15 (ii)

Idée : Pour ces équations, il faut utiliser quelques propriétés élémentaires de la valeur absolue, qu'il faut être capable de retrouver avec un petit dessin au brouillon. Notre but ici est toujours de "lever" la valeur absolue (de se ramener à des (in)égalité ne faisant pas intervenir de valeur absolue).

Soient a et x des réels. Voyons comment lever la valeur absolue pour des (in)égalités reliant $|x|$ et a .

Tout d'abord, il y a quelques cas triviaux à identifier, provenant de la positivité de la valeur absolue.

- Si $a < 0$, les (in)égalité $|x| = a$, $|x| < a$ et $|x| \leq a$ sont fausses quelque soit x .
- Si $a < 0$, les inégalité $|x| \geq a$ et $|x| > a$ sont vraies quelque soit x .

Supposons maintenant a positif.

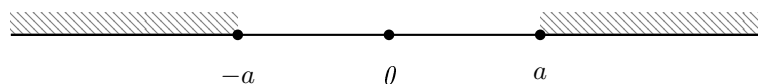
On peut alors lever la valeur absolue à l'aide des équivalence suivantes (voir Chap. 2) :

- $|x| = a \iff x = a \text{ ou } x = -a$.
- $|x| < a \iff -a < x < a$, et : $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
- $|x| > a \iff x > a \text{ ou } x < -a$, et : $|x| \geq a \iff x \geq a \text{ ou } x \leq -a$.

Plutôt que d'apprendre tout ceci par coeur, je vous conseille d'apprendre à retrouver ces levées de valeur absolue à l'aide d'un dessin à refaire rapidement au brouillon (puis de tête).

Pour la valeur absolue, retenez bien ce principe : la valeur absolue d'un réel x est sa distance à 0.

Voici une illustration de l'équivalence " $|x| \geq a \iff x \geq a \text{ ou } x \leq -a$ " lorsque $a \geq 0$:



On a juste hachuré les points à distance plus grande ou égale à a de l'origine.

Un dernier point assez simple pour lever des valeurs absolue (réfléchissez-y) :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |a| = |b| \iff a = b \text{ ou } a = -b.$$

a) Notons (E_1) l'inéquation définie sur $\mathbb{R}$ par $|4 - 2x| \leq 8$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a la chaîne d'équivalence :

$$\begin{aligned} |4 - 2x| \leq 8 &\iff -8 \leq 4 - 2x \leq 8 \\ &\iff -4 \leq -2x \leq 12 \\ &\iff 2 \geq x \geq -6 \end{aligned}$$

(car $-2 < 0$).

Donc l'ensemble des solutions de (E_1) est $[-6, 2]$.

b) Notons $(E_2) : |x^2 - 1| > 2$ l'inéquation considérée, d'inconnue réelle x et définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par équivalence :

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| > 2 &\iff x^2 - 1 < -2 \text{ ou } x^2 - 1 > 2 \\ &\iff x^2 < -1 \text{ ou } x^2 > 3 \\ &\stackrel{(1)}{\iff} x^2 > 3 \\ &\iff x < -\sqrt{3} \text{ ou } x > \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(1) : Tout carré est positif, donc $x^2 < -1$ est faux.

Attention à la dernière équivalence, classique mais meurtrière dans les DS (beaucoup d'élèves oublient $x < -\sqrt{3}$).

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est $] -\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$.

Exercice 16 (i)

C'est une équation polynomiale du second degré, rien de plus. Il faut juste apprendre à gérer un paramètre.

Notons (E) l'équation $x^2 + x + m(x - 1) = 0$ d'inconnue réelle x (m est fixé par l'énoncé).

(E) est définie sur $\mathbb{R}$ en tant qu'équation polynomiale.

On peut réécrire $(E) : x^2 + (m + 1)x - m = 0$ qui est une équation polynomiale du second degré.

Son discriminant est $\Delta = (m + 1)^2 + 4m = m^2 + 6m + 1$.

Étudions le signe de Δ (en fonction de m).

Le polynôme du second degré $P = X^2 + 6X + 1$ admet pour discriminant $\Delta' = 32$ donc admet pour racines $m_1 = \frac{-6 - \sqrt{32}}{2} = -3 - 2\sqrt{2}$ et $m_2 = -3 + 2\sqrt{2}$.

Le coefficient dominant de P étant positif, on a le tableau de signe suivant :

m	$-\infty$	m_1	m_2	$+\infty$
$\Delta = P(m)$		+	-	+

Reprenons la résolution de (E) .

1e cas : Si $m \in [m_1, m_2]$. Dans ce cas, $\Delta < 0$ donc l'équation (E) n'admet pas de solutions.

2e cas : Si $m = m_1$ ou $m = m_2$. Dans ce cas, $\Delta = 0$ donc (E) admet une unique solution : $-\frac{m+1}{2}$.

3e cas : Sinon, $m \in]-\infty, m_1[\cup]m_2, +\infty[$. Dans ce cas, $\Delta > 0$ donc (E) admet deux solutions (distinctes):

$$x_1 = \frac{-(m+1) - \sqrt{m^2 + 6m + 1}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(m+1) + \sqrt{m^2 + 6m + 1}}{2}.$$

Conclusions :

- Si $m \in]-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}[$, alors (E) n'admet pas de solutions.
- Si $m = -3 - 2\sqrt{2}$, l'unique solution de (E) est $-\frac{-3 - 2\sqrt{2} + 1}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
- Si $m = -3 + 2\sqrt{2}$, l'unique solution de (E) est $1 - 2\sqrt{2}$.
- Sinon, (E) admet deux solutions distinctes :

$$\frac{-(m+1) - \sqrt{m^2 + 6m + 1}}{2} \text{ et } \frac{-(m+1) + \sqrt{m^2 + 6m + 1}}{2}$$

Exercice 16 (ii)b)

Idée : on se ramène à une équation du second degré à l'aide d'un changement de variable.

Notons (E) l'équation $x - \sqrt{x} - 2 = 0$, d'inconnue réelle x .

Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \sqrt{t}$ ayant pour domaine de définition $\mathbb{R}_+$, l'expression $\sqrt{x}$ est bien définie si et seulement si $x \geq 0$. Par somme, $x - \sqrt{x} - 2$ est bien défini si et seulement si $x \geq 0$, donc (E) admet pour domaine $D = \mathbb{R}_+$.

Soit maintenant $x \in D$.

$$\begin{aligned} "x \text{ est solution de } (E)" &\iff x - \sqrt{x} - 2 = 0 \\ &\iff (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 2 = 0 \\ &\iff u^2 - u - 2 = 0, \end{aligned}$$

où l'on a posé $u = \sqrt{x}$.

Le polynôme du second degré $X^2 - X - 2$ admet pour racine -1 (car $(-1)^2 + 1 - 2 = 0$) et 2 (*passer par le discriminant, mais on aura des méthodes plus rapides en présence d'une racine évidente*).

Ainsi (*n'oubliez pas de "revenir à x "*):

$$\begin{aligned} "x \text{ est solution de } (E)" &\iff u^2 - u - 2 = 0 \\ &\iff u = -1 \text{ ou } u = 2 \\ &\iff \sqrt{x} = -1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\ &\stackrel{(1)}{\iff} \sqrt{x} = 2 \\ &\stackrel{(2)}{\iff} x = 4 \end{aligned}$$

(1) : $\sqrt{x} \geq 0$ et $-1 < 0$ donc $\sqrt{x} \neq -1$.

(2) : par croissance stricte de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ ($\sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ et $2 \in \mathbb{R}_+$).

$4 \in D$ donc : L'unique solution de (E) est 4.

Exercice 16 (iii)b)

Soit m un réel.

Notons (E_m) l'équation $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = m$, d'inconnue réelle x .

e^x et e^{-x} étant définis pour tout réel x , il en est de même pour $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, donc (E_m) admet pour domaine de définition $\mathbb{R}$.

Premier cas : Si $m \leq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors, l'exponentielle étant à valeurs strictement positives : $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$.

Donc par somme, $e^x + e^{-x} > 0$, puis (puisque $2 > 0$) : $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$.

Par ailleurs, $m \leq 0$.

On a donc : $m \leq 0 < \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ donc en particulier : $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \neq m$.

Ceci étant vrai pour tout réel x : L'équation (E_m) n'admet pas de solution, lorsque $m \leq 0$.

Second cas : Sinon, $m > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 "x \text{ est solution de } (E_m)" &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = m \\
 &\iff e^x + e^{-x} = 2m && (\text{ car } 2 \neq 0) \\
 &\iff e^x - 2m + e^{-x} = 0 \\
 &\iff (e^x)^2 - 2me^x + e^{-x}e^x = 0 && (\text{ car } e^x \neq 0) \\
 &\iff (e^x)^2 - 2me^x + 1 = 0 && (\text{ car } e^x \neq 0) \\
 &\iff t^2 - 2mt + 1 = 0,
 \end{aligned}$$

où l'on a posé : $t = e^x$.

Ainsi, x est solution de (E_m) si et seulement si t est racine du polynôme $P = X^2 - 2mX + 1$.

Ce polynôme du second degré admet pour discriminant $\Delta = 4m^2 - 4 = 4(m^2 - 1)$.

Δ est du signe de $m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$ car $4 > 0$.

On a le tableau de signe suivant :

m	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$m^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

On rappelle qu'ici $m > 0$.

Premier sous-cas : Si $m \in]0, 1[$.

Dans ce cas, $\Delta < 0$ donc P n'admet pas de racine. Donc " e^x est racine de P " est faux, donc x n'est pas solution de (E_m) , et ce pour tout réel x .

Ceci montre que (E_m) n'a pas de solution si $m \in]0, 1[$.

Second sous-cas : Si $m = 1$.

Dans ce cas, $\Delta = 0$ donc P admet une unique racine : $\frac{2m}{2} = 1$.

Reprenons l'équivalence précédente :

$$"x \text{ est solution de } (E_m)" \iff t = 1 \iff e^x = 1 \iff x = \ln(1) \iff x = 0,$$

par croissance stricte du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ ($(e^x, 1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$).

$0 \in \mathbb{R}$, donc si $m = 1$, alors l'unique solution de (E_m) est 0 .

Troisième sous-cas : si $m > 1$.

Dans ce cas, $\Delta > 0$ donc P admet deux racines distinctes : $t_1 = \frac{2m - \sqrt{4(m^2 - 1)}}{2} = m - \sqrt{m^2 - 1}$ et $t_2 = m + \sqrt{m^2 - 1}$.

Donc x est solution de (E_m) si et seulement si : $e^x = t_1$ ou $e^x = t_2$.

Or, $t_2 > 0$ car $m > 0$ et $\sqrt{m^2 - 1} \geq 0$.

Donc : $e^x = t_2 \iff x = \ln(t_2) \iff x = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1})$.

D'autre part, $m > 1$ donc $m^2 > 1$ donc $0 < m^2 - 1 < m^2$.

Par croissance stricte de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{0} = 0 < \sqrt{m^2 - 1} < \sqrt{m^2} = m$$

($\sqrt{m^2} = m$ car $m \geq 0$ dans ce cas).

Donc $t_1 = m - \sqrt{m^2 - 1} > 0$.

Donc $e^x = t_1 \iff x = \ln(m - \sqrt{m^2 - 1})$.

Finalement : Si $m > 1$, (E_m) admet exactement deux solutions : $\ln(m + \sqrt{m^2 - 1})$ et $\ln(m - \sqrt{m^2 - 1})$.