

Chapitre 1 : Logique, langage mathématique et raisonnements

ECG1 A, Lycée Hoche

Contents

I. Premières notions de théorie des ensembles	3
1. Ensembles usuels du lycée	4
2. Éléments d'un ensemble et quantificateurs	5
a) Appartenance et inclusion	5
b) Quantificateurs	5
II. Propositions	7
1. Propositions, propositions à paramètres	7
2. Comment se donner un ensemble	8
3. Les intervalles réels	9
III. Logique	10
1. Connecteur logiques	10
2. Logique et ensembles	11
3. Implication, équivalence	12
IV. Démonstrations en mathématiques	14
1. Négation d'une proposition	14
a) Lois de De Morgan	14
b) Négation d'une implication, d'une équivalence	14
c) Négation et quantificateurs	15
2. Quelques schémas de démonstration	15
a) Démontrer une implication : la méthode directe	15
b) Démontrer une implication : la contraposée	16
c) Démontrer une équivalence	16
d) Le modus ponens	16
e) Démontrer les propositions quantifiées	17
f) Utilisation d'un contre exemple	17
3. Raisonnement par l'absurde, disjonction des cas, analyse-synthèse	18
a) Le raisonnement par l'absurde	18
b) La disjonction des cas	18
c) Le raisonnement par analyse-synthèse	19
4. Remarques sur l'utilisation des hypothèses	20
a) Base démonstrative	20
b) Utilisation des hypothèses quantifiées	21
c) Inclusions et égalités d'ensembles	21
V. Le raisonnement par récurrence	22
1. Le principe de récurrence	22
2. Variantes de la récurrence	23

Dans ce chapitre, on dévoile le langage mathématique utilisé unanimement par les mathématiciens et mathématiciennes depuis le début du 20^e siècle, celui la théorie des ensembles. On introduit la logique et les structures de démonstration classiques qui en découlent.

La première leçon : apprendre à appliquer un théorème (et à lire un cours de maths)

Ce premier point est absolument capital pour tout le reste de l'année. Vous devez apprendre à appliquer un théorème. Ce n'est pas bien compliqué, mais c'est une première étape à bien comprendre afin de bien comprendre la logique mathématique et les standards de rédaction qui en découlent.

Un cours de mathématiques est essentiellement composé de 3 types de textes : des définitions, des théorèmes et des démonstration. Bien sûr, pour être intéressant, il doit s'illustrer d'exemples, de remarques et d'exercices - et ces points ne doivent jamais être négligés à la lecture.

Définition

Donner une définition, c'est simplement donner un nom à un type d'objet mathématique. Dans votre approche d'étudiant, vous n'avez pas le choix : **les définitions doivent être connues par cœur**. Sans cela, il vous sera impossible de comprendre les énoncés des exercices.

Voici un exemple.

Définition 1. Soit I un intervalle réel, et f une fonction réelle définie sur I . On dit que f est une fonction **croissante** sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

- Remarque.** (i) Dans cette définition, on définit la notion de "fonction croissante sur un intervalle".
- (ii) Une fois cette définition posée, on a le droit de considérer l'énoncé " f est croissante sur I " dès que I désigne un intervalle, et f une fonction définie sur I (c'est-à-dire tel que I soit inclus dans le domaine de définition de f).
- (iii) Dans ce cas, dire que l'énoncé " f est croissante sur I " est vrai revient exactement à dire que l'énoncé mathématique suivant est vrai :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

Théorème, lemme, proposition, propriété...

Théorèmes, lemmes, propositions, propriétés, faits... sont, d'un point de vue logique, des synonymes. L'utilisation d'un terme ou de l'autre est liée à l'appréciation qu'on fait de l'importance du résultat - ce qui est assez subjectif. L'usage est de désigner par "théorème" un résultat majeur, par "proposition" un résultat intermédiaire important, et par "lemme" un petit résultat qu'on utilise immédiatement pour démontrer une proposition ou un théorème. Vous n'avez pas à vous embêter avec cette distinction, et on utilisera d'ailleurs souvent les mots "théorème" et "proposition" comme des synonymes.

Un théorème (ou un lemme, ou une proposition) est une assertion mathématique qui est vraie.

Vous devez avoir bien compris comment apprendre et comment appliquer à l'écrit un théorème. Considérons l'énoncé suivant (version light du théorème de la bijection monotone):

Proposition 2. *Soit I un intervalle et f une fonction définie et continue sur I . Si f est strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.*

On peut identifier trois espaces dans cet énoncé :

- Le contexte : « Soit I un intervalle et f une fonction définie et continue sur I ». On y introduit les notations nécessaire à la formulation de l'énoncé, en précisant bien la nature de ces objets.
- Les hypothèses : « Si f est strictement monotone sur I ». Ce sont les conditions nécessaire à ce que le théorème s'applique.
- La conclusion : « alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$. ».

Remarquons une certaine porosité entre le contexte et la conclusion : la proposition 3 ci-dessous dit exactement la même chose que la proposition 2.

Proposition 3. *Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I . Si f est continue et strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.*

Ici, " f est continue" est passé de contexte à hypothèse. Cette seconde version met mieux en évidence les hypothèses à vérifier, mais vous devez voir qu'il n'y a pas de différence entre ces énoncés.

Appliquer un théorème

Appliquer un théorème, c'est - dans le cadre d'une démonstration, en exercice par exemple - dire à son lecteur que le théorème s'applique dans notre contexte. L'unique recette est la suivante :

- (i) Vérifier qu'on est en présence d'objets de la bonne nature (contexte).
- (ii) Vérifier que toutes les hypothèses du théorèmes sont vraies, puis
- (iii) dire qu'on applique un théorème. On peut pour cela invoquer la formule "par théorème", ou donner le nom du théorème s'il en a un (cette étape est parfois omise, si l'application d'un théorème est assez claire).
- (iv) Enfin, on peut conclure la conclusion **exacte** du théorème, sans altérer celle-ci par rapport à la forme qu'elle a dans l'énoncé.

Pour bien appliquer un théorème, vous devez donc connaître parfaitement le contexte, les hypothèses et la conclusion.

Démonstration

Une démonstration est un texte qui décrit un raisonnement permettant d'affirmer qu'un résultat mathématique est vrai, autrement dit qu'un énoncé est bien un théorème. On en reparlera longuement pendant ce chapitre.

Remarque. Un théorème est une assertion mathématique qui est vraie. Sa véracité est prouvée dans un texte appelé "démonstration". Cette démonstration s'appuie sur des théorèmes et définitions antérieures. Et vu qu'il faut bien partir de quelque part : on appelle axiome un énoncé mathématique dont on admet la véracité. Les axiomes de la théorie des ensembles sont intéressants, mais dépassent largement le cadre de ce cours. Au lieu de s'y intéresser, on admettra (c'est-à-dire, on tiendra pour vrai sans démonstration) occasionnellement certains résultats mathématiques (ces résultats admis sont souvent nos "points de départ").

I. Premières notions de théorie des ensembles

Idée. En mathématiques, on manipule des objets de différentes natures : des nombres entiers, des nombres réels, des suites réelles, des fonctions, des suites de fonctions, des points du plan, des nombres binaires etc. Ces objets sont invoqués lors de raisonnements (les démonstrations, ou preuves) permettant d'établir des résultats mathématiques. Ces raisonnements s'appuient sur la logique. Vous comprendrez au fur

et à mesure de votre apprentissage que les ensembles ont la double fonction de formaliser cette notion de nature d'un objet, et d'être entièrement compatibles avec nos règles logiques. Un chapitre ultérieur reviendra sur la notion d'ensemble.

1. Ensembles usuels du lycée

Voici les premiers ensembles auxquels vous devriez penser.

Définition 4. (i) On appelle *ensemble des entiers naturels*, et on note $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers positifs :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

(ii) On appelle *ensemble des entiers relatifs*, et on note $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres entiers :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

(iii) On appelle *ensemble des nombres rationnels*, et on note $\mathbb{Q}$, l'ensemble des fractions rationnelles, c'est-à-dire l'ensemble des fractions d'entiers relatifs (avec un dénominateur non nul). Ainsi :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

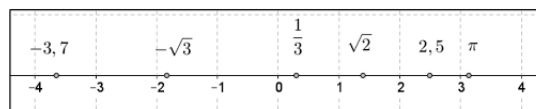
Remarque. L'écriture " $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ " se lit : "L'ensemble des p sur q , pour p appartenant à $\mathbb{Z}$ et q appartenant à $\mathbb{Z}$ privé de zéro".

Remarque. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est donc l'ensemble des fractions d'entiers, comme $\frac{1}{3}$ ou $\frac{-3}{7}$. Comme vous devriez le savoir, la règle des signes permet par exemple d'écrire $\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$, $\frac{-4}{7} = \frac{4}{-7}$, et $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$. Plus généralement, tout nombre rationnel s'écrit comme une fraction dont le dénominateur est positif. On a donc la définition équivalente suivante, souvent plus pratique, de l'ensemble $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

où $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \dots\}$ des nombres naturels non nuls.

Définissons maintenant l'ensemble des nombres réels. On appelle droite graduée toute droite donnée avec une origine (le point noté 0) et une unité (le point noté 1). On se représente très bien les réels sur une droite graduée.



Les nombres réels sont tous les nombres correspondant à un point sur cette droite. Les entiers relatifs sont donc des nombres réels, les nombres rationnels également, mais certains nombres réels comme $\sqrt{2}$ ou π sont des nombres irrationnels : on ne peut les écrire sous la forme d'une fraction rationnelle.

Définition 5. On appelle *ensemble des nombres réels*, et on note $\mathbb{R}$, l'ensemble de nombres représenté par une droite graduée.

Remarque. Cette représentation des réels en une droite graduée est très importante, et illustre par exemple très bien la notion d'ordre ($\leq$) sur les réels : un nombre réel x est inférieur ou égale à un nombre réel y si et seulement si " x est plus à gauche que y sur cette droite graduée".

Remarque. Pour les ensembles introduits jusqu'ici, on adoptera la notation suivante : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturel non nuls, des entiers relatifs non nuls, des nombres rationnels non nuls et des nombres réels non nuls.

2. Éléments d'un ensemble et quantificateurs

a) Appartenance et inclusion

Vous pouvez raisonnablement penser à un ensemble comme à un sac d'objets mathématiques ayant la même nature (cette nature étant... le nom de l'ensemble). Les objets d'un ensemble sont appelés *les éléments* de cet ensemble.

- Exemple 6.** (i) 2 est un élément de $\mathbb{N}$, et aussi un élément de $\mathbb{Z}$,
(ii) les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés les fractions rationnelles,
(iii) Il existe un élément de $\mathbb{R}$ qui n'est pas élément de $\mathbb{Q}$, par exemple $\sqrt{2}$.

Au passage, vous devez savoir cette définition.

Définition 7. On appelle *ensemble vide*, et on note $\emptyset$, l'ensemble mathématique n'ayant aucun élément.

Cet ensemble sera très utile pendant l'année : pour dire qu'un ensemble F n'a pas d'éléments, on écrit $F = \emptyset$.

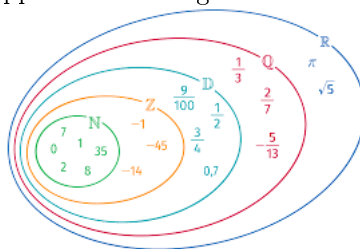
Définition 8. Soit x un objet mathématique et E un ensemble.

- (i) La notation $x \in E$ se lit " x appartient à E " et signifie que x est un élément de E .
(ii) La notation $x \notin E$ se lit " x n'appartient pas à E " et signifie que x n'est pas un élément de E .

Remarque. Cette définition est un point de départ : on n'écrit (quasi) plus jamais "Soit x un objet mathématique", mais vous devez comprendre que, dans la définition ci-dessus, le symbole x peut désigner tout objet mathématique.

Définition 9. Soient A et B deux ensembles. On dit que A *est inclus dans* B , et on note $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B . On dit aussi que A *est un sous ensemble de* B , ou que A *est une partie de* B .

Exemple 10. On peut écrire la suite d'inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On peut représenter ces inclusions à l'aide de "patates", (appelées aussi diagrammes de Venn).



b) Quantificateurs

En mathématiques, on accorde toujours une place particulière au degré de généralité d'un énoncé. Par exemple, la phrase

$$e^x > 0$$

n'a de sens que si l'on a précisé avant qui est x . Est-ce un nombre explicite donné? Veut-on dire que l'inégalité est vraie pour tout nombre x ? Si oui, de quelle nature? On pourrait enfin vouloir dire que cette inégalité est vérifiée par au moins (ou exactement) un nombre x , sans avoir à préciser lequel.

Définition 11. Soit E un ensemble. Les symboles suivants permettent d'introduire des variables dans une phrase mathématique.

- (i) " $\forall x \in E$ " se lit "pour tout x appartenant à E " et introduit une variable x à laquelle on peut substituer n'importe quel élément de E .
- (ii) " $\exists x \in E$ " se lit "il existe x appartenant à E " et introduit une variable x à laquelle on peut substituer au moins un élément de E (sans préciser un tel élément).
- (iii) " $\exists! x \in E$ " se lit "il existe un unique x appartenant à E " et introduit une variable x à laquelle on peut substituer un unique élément de E (sans préciser lequel).

Exemple 12. (i) La proposition (ou assertion) " $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ " signifie, en français : pour tout réel x , l'exponentielle de x est strictement positive. On peut reformuler cet assertion de manière plus compacte en : l'exponentielle de tout réel est strictement positive. Cette assertion est vraie.

(ii) La proposition " $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Q}$ " signifie que pour tout réel x , x est un nombre rationnel. Cette assertion est fausse, par exemple $\sqrt{2}$ est un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel.

(iii) La proposition " $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq n$ " signifie : il existe un entier naturel n tel que, pour tout réel x , on ait $x \leq n$. Exercice : reformuler cette assertion en français. Sans justification, cette assertion est-elle vraie?

(iv) La proposition " $\exists! x \in \mathbb{R}, e^x = 1$ " signifie qu'il existe un unique nombre réel x tel que $e^x = 1$. Cette assertion est vraie : on peut démontrer que le seul réel x tel que $e^x = 1$ est $x = 0$.

(v) La proposition " $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ " est-elle vraie?

Remarque. Lecture de la virgule L'énoncé suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Q}$$

se lit littéralement "Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, x appartient à $\mathbb{Q}$ ". La virgule (mathématique) est ici traduite en virgule française (la première partie de la proposition conditionne le sens de la seconde et une virgule française exprime bien cette dépendance). Par contre, l'énoncé :

$$\exists x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Q}$$

se lit "Il existe x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x appartient à $\mathbb{Q}$ ". La virgule est traduite en un "tel que", nécessaire pour exprimer le liens entre les deux parties de la phrase. Une virgule suivant un quantificateur $\exists$ ou $\exists!$ est toujours traduite ainsi.

Exercice 13. Traduire tous les énoncés suivants en phrase mathématique. Donner leur véracité, et une démonstration si vous vous en sentez capable.

- (i) Étant donné un nombre réel, on peut toujours trouver un nombre réel qui lui est strictement supérieur.
- (ii) Il existe un entier naturel inférieur à tous les entiers naturels.
- (iii) Pour tout réel strictement positif x , on peut trouver un réel non nul dont le carré est inférieur à x .
- (iv) Il existe un nombre réel x tel que $2x + 1 = 0$.
- (v) L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ admet une solution réelle (respectivement, une unique solution réelle).

Remarque. Rédaction, Important Comme vous commencez à le voir, on a le choix, pour écrire les mathématiques, entre l'utilisation du français et celle des symboles mathématiques. A ce titre, **les symboles mathématiques ne sont pas des abréviations**. Seule exception : vous pouvez, dans un texte en français, utiliser le symbole d'appartenance, comme dans "Soit $x \in \mathbb{R}$ ".

Maths $\neq$ Français

Attention à ce point de rédaction qui crispe tout correcteur.

Quand vous écrivez un texte mathématique, vous avez le droit :

- (i) D'écrire une phrase en français correcte, qui commence par une majuscule et se termine par un point,
- (ii) d'écrire une assertion entièrement en langage mathématique (correcte en terme de syntaxe et de sens),
- (iii) de désigner, au sein d'une phrase en français, une assertion mathématique.

Si on a besoin de changer de langage dans une même phrase, on peut utiliser des guillemets ou un deux-points.

Exemple 14. Noter une démonstration correcte commentée de l'énoncé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} \geq 1.$$

II. Propositions

1. Propositions, propositions à paramètres

En mathématiques, on manipule ce qu'on appelle des propositions.

Définition 15. (*Définition informelle*) On appelle proposition toute phrase mathématique (qu'elle soit écrite en langage mathématique ou en français) qui est soit vraie, soit fausse.

Remarque. On peut tout à fait se référer à une proposition en la nommant par une lettre. Cette remarque tient pour tout objet mathématique.

Remarque. Dans le cours de mathématiques, quand on écrit "**Proposition :**", c'est pour indiquer que la proposition mentionnée est vraie.

Exemple 16. (i) "Actuellement, il ne pleut pas" est une proposition (pas vraiment mathématique). Mais " $\forall n \in \mathbb{N}, 2n$ " n'est pas une proposition.

(ii) La phrase $e^x > 0$ n'est pas, à priori, une proposition. Même si l'on connaît la fonction exponentielle, on ne sait pas qui est x . Cette phrase ne se suffit pas à elle-même.

(iii) La phrase $e^x > 0$ devient une proposition si on a auparavant posé, par exemple, $x = 2$. Cette proposition est alors égale à la proposition $e^2 > 0$.

(iv) Les phrases $\mathcal{P}$: " $\forall x \in \mathbb{R}, e^x < 0$ " et $\mathcal{Q}$: " $\exists x \in \mathbb{R}, e^x < 0$ " sont deux propositions tout à fait valides. Par contre, elles sont fausses, car la proposition " $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ " est vraie.

(v) La phrase "Cette phrase est fausse" n'est pas une proposition, car on ne peut lui associer de valeur de vérité (vrai/faux). Et en plus, cette phrase est auto-référente, ce qui est interdit : toute proposition doit-être énoncée à l'aide d'objets déjà existants.

On a le droit de considérer des propositions contenant des variables, comme " $e^x > 2$ ", sans avoir posé x avant, à condition de préciser la nature de la variable x .

Définition 17. Soit E un ensemble.

On appelle **proposition à paramètres** indexée par E la donnée $\mathcal{P}$ d'une proposition $\mathcal{P}(e)$ pour chaque élément e de E . On notera alors $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(e))_{e \in E}$.

On dira que $\mathcal{P}$ est une proposition à paramètre, indexée par l'ensemble E .

Autrement dit, une proposition $\mathcal{P}$ paramétrée par l'ensemble E est la donnée, pour tout élément e de E , d'une proposition $\mathcal{P}(e)$.

Exemple 18. (i) Notons, pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ la proposition “ $n^2 > n$ ”. On a ainsi défini une proposition $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ paramétrée par l’ensemble $\mathbb{N}$. Alors :

- (a) $\mathcal{P}(0)$ s’écrit $0^2 > 0$, ce qui est faux.
- (b) $\mathcal{P}(1)$ s’écrit $1^2 > 1$, ce qui est faux.
- (c) Mais vous pouvez vérifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(ii) On peut considérer la proposition à paramètre $\mathcal{P}$ indexée par $\mathbb{R}^*$ et donnée par $\mathcal{P}(x)$: “ $\frac{1}{x} > 0$ ”.

(iii) Pour définir une proposition à paramètres, vous devriez utiliser l’une des formules suivantes :

- (a) Notons, pour tout réel x , $\mathcal{P}(x)$: “ $x^2 + 2x + 1 = 0$ ”.
- (b) Soit $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(x))_{x \in \mathbb{R}}$ donnée par $\mathcal{P}(x) : x^2 + 2x + 1 = 0$.
- (c) Considérons, pour x élément de $\mathbb{R}$, la proposition $\mathcal{P}(x)$: “ $x^2 + 2x + 1 = 0$ ”.

(iv) Une fois la proposition définie comme ci-dessus, vous pouvez :

- (a) Vous référer à la proposition à paramètre avec la notation $\mathcal{P}$ ou $(\mathcal{P}(x))_{x \in \mathbb{R}}$,
- (b) vous référer à chacune des propositions $\mathcal{P}(x)$, qui sont individuellement vraies ou fausses, à condition d’avoir introduit la variable x avant (avec un quantificateur, une phrase en français équivalente, ou bien en attribuant directement une valeur à x).
- (c) Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est une proposition.

Remarque. Une proposition à paramètres n’a pas *une seule* valeur de vérité, mais une valeur de vérité pour chaque valeur possible du paramètre.

Définition 19. Soit E un ensemble, et $\mathcal{P}$ une proposition paramétrée par E . Alors :

- (i) “ $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ ” est une proposition qui est vraie exactement quand toutes les propositions $\mathcal{P}(x)$ sont vraies, pour tout x élément de E .
- (ii) “ $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ ” est une proposition qui est vraie exactement s’il existe un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- (iii) “ $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ ” est une proposition qui est vraie exactement s’il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Remarque. Dans un cours de mathématiques, quand on écrit **Proposition :** ou **Théorème :**, c’est pour signifier que la proposition donnée est vraie. De même, on aurait pu écrire dans l’énoncé précédent :

“ $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ ” est une proposition qui est vraie s’il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$.

Comprenez : si $\mathcal{Q}$ est une proposition, écrire “tel que $\mathcal{Q}$ ” revient à écrire “tel que $\mathcal{Q}$ est vraie”.

Exercice 20. Donner le statut des phrases suivantes, et le cas échéant, dire si la proposition est vraie ou fausse.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > y$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{Z}, z < 0$ et $z^2 = n^2$,

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y$ ou $y < z < x$.

2. Comment se donner un ensemble

Il existe deux moyens de se donner un ensemble.

Définition 21. (i) Se donner un ensemble en **extension**, c'est donner un ensemble en donnant la liste de ses éléments. Voici les 3 moyens classiques de le faire.

$$E = \{1, 2, 3, 5\} \quad (\text{cas d'un ensemble fini})$$

$$F = \{0, 2, 4, 6, \dots\} \quad (\text{cas d'un ensemble infini particulièrement simple})$$

$$F = \{2k | k \in \mathbb{N}\} \quad (\text{Utilisation d'une formule pour paramétrer l'ensemble}).$$

(ii) Se donner un ensemble en **compréhension**, c'est se donner un ensemble comme sous-ensemble d'un autre, à l'aide d'une proposition à paramètre. Par exemple :

$$F = \{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$$

Remarque. • $\{2k | k \in \mathbb{N}\}$ se lit "L'ensemble des $2k$, pour k appartenant à $\mathbb{N}$ ".

• $\{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$ se lit "L'ensemble des entiers naturels n tels que : $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$ ".

Remarque. Les trois définitions données pour F correspondent. Dans la deuxième, on dit que les entiers naturels pairs sont les doubles des entiers naturels. Dans la troisième, on dit que les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, où k désigne un entier naturel quelconque... C'est la même chose.

Remarque. • Considérons une définition en extension :

$$G = \{ \overbrace{2k^2 + k + 1}^{\text{formule}} \mid \overbrace{k \in \mathbb{Z}}^{\text{paramètre(s)}} \}.$$

Ici, G est l'ensemble des objets de la forme $2k^2 + k + 1$, où le paramètre k décrit l'ensemble des entiers relatifs. En particulier, $G \subset \mathbb{Z}$ car : $\forall k \in \mathbb{Z}, 2k^2 + k + 1 \in \mathbb{Z}$.

• Considérons une définition en compréhension :

$$H = \{ \underbrace{n \in \mathbb{Z}}_{\text{Ensemble "ambient"}} \mid \underbrace{n^2 < 10}_{\text{propriété décrivant le sous ensemble}} \}.$$

Cette définition affirme que :

(i) H est la partie de $\mathbb{Z}$...

(ii) ... formée des éléments n tels que : $n^2 < 10$.

Exemple 22. (i) Quels sont les éléments de l'ensemble A décrit en extension par : $A = \{2k + t^2 | k \in \{0, 1\}, t \in \{2, 3\}\}$?

(ii) Quels sont les éléments de l'ensemble B décrit en compréhension par : $B = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 2 \text{ et } x \in \mathbb{R}_+^*\}$?

Remarque. Définir un ensemble en compréhension revient à donner une proposition à paramètre. Ici il s'agit de la proposition " $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$ " pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Les intervalles réels

On aura souvent besoin d'utiliser certaines parties de $\mathbb{R}$, les intervalles.

Définition 23. Soient a et b deux réels, ou éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. On définit les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

(i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

(ii) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

(iii) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

(iv) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

où, dans cette définition, on considère que : $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$.

Ces parties sont appelées **les intervalles de $\mathbb{R}$** .

Remarque. Les intervalles de la forme $]a, b[$ sont appelés les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et les intervalles de la forme $[a, b]$, $] - \infty, b]$, $[a, +\infty[$ ou $] - \infty, +\infty[$ sont appelés intervalles fermés de $\mathbb{R}$.

Remarque. Si $b < a$, on a alors $[a, b] = \emptyset$, et de même pour les autres types d'intervalles.

Remarque. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des intervalles à la fois ouverts et fermés (ce sont les seuls).

Remarque. On notera $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_- =] - \infty, 0]$, et $\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$ ces ensembles privés de 0.

Remarque. On notera parfois, par exemple :

$$\mathbb{N}_{\geq 15} = \{15, 16, 17, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 15\} = \llbracket 15, +\infty \rrbracket.$$

III. Logique

1. Connecteur logiques

Idée. On peut combiner plusieurs propositions pour faire de nouvelles propositions.

Définition 24. Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- (i) On appelle **disjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition notée " $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ " (et parfois $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$), vraie exactement quand au moins une des deux proposition $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie.
- (ii) On appelle **conjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition notée " $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ " (et parfois $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$), vraie exactement quand les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies.
- (iii) On appelle **négation** de la proposition $\mathcal{P}$ la proposition notée "non $\mathcal{P}$ " ou $\neg \mathcal{P}$, qui est vraie exactement quand $\mathcal{P}$ est fausse.

Remarque. En mathématiques, le **connecteur logique "ou" est inclusif**. Autrement dit, si " $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ " est vraie, alors " $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ " est vraie.

Remarque. Les termes de disjonction et de conjonction seront peu utilisés, mais vous devez savoir qu'ils désignent les connecteur logiques "**ou**" et "**et**", que nous utiliserons à foison.

Remarque. Pour bien définir les connecteurs logiques, on peut dresser leur table de vérité. En anticipant sur l'implication et l'équivalence, cela donne :

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
false	false	true	false	false	true	true
false	true	true	false	true	true	false
true	false	false	false	true	false	false
true	true	false	true	true	true	true

A partir de propositions, on peut maintenant construire de nouvelles propositions.

Exercice 25. Donner, en fonction des valeurs de vérité des propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, la valeur de vérité de la proposition $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$ et $(\neg \mathcal{P})$. Vous pourrez vous aider de la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{P}$	$(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } (\neg \mathcal{P})$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Pouvez vous simplifier cette formule logique?

2. Logique et ensembles

Définition 26. Soient A et B deux ensembles.

- (i) On appelle **réunion de A et B** l'ensemble noté $A \cup B$ dont les éléments sont ceux de A ou de B . Autrement dit, écrire " $x \in A \cup B$ " revient à écrire " $x \in A$ ou $x \in B$ ".
- (ii) On appelle **intersection de A et B** l'ensemble noté $A \cap B$ dont les éléments sont ceux à la fois dans A et dans B . Autrement dit, " $x \in A \cap B$ " revient à " $x \in A$ et $x \in B$ ".
- (iii) On appelle **B privé de A** l'ensemble noté $B \setminus A$ dont les éléments sont les éléments de B qui ne sont pas dans A . Autrement dit, pour tout $x \in B$, il revient au même d'écrire " $x \in B \setminus A$ " et " $x \notin A$ ".

Remarque. " $x \notin A$ " est la négation de " $x \in A$ ". On peut se servir de cette notation pour **affirmer**, mais pas pour quantifier (on n'écrit jamais "Soit $x \notin A$ ").

Remarque. Reprenons la définition précédente avec A et B deux ensembles définis en compréhension à partir d'un même ensemble E . On aurait donc des propositions à paramètres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ indexées par E telles que :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\} \\ B &= \{x \in E \mid \mathcal{Q}(x)\} \end{aligned}$$

Alors, on observe une compatibilité entre ensembles et logique :

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in E \mid \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)\} \\ A \cap B &= \{x \in E \mid \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)\} \\ E \setminus A &= \{x \in E \mid \neg \mathcal{P}(x)\} \end{aligned}$$

Exercice 27. Expliciter les ensembles suivants :

(i) $[-1, 4] \cup [0, 5]$

(ii) $[-1, 4] \cap]0, 5[$

(iii) $\mathbb{Z} \cap]-\pi, \pi[$

(iv) $\mathbb{R}^* \cap]-10, 12[$

3. Implication, équivalence

Définition 28. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On définit alors:

- (i) la proposition $\mathcal{P}$ **implique** $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-dessous,
- (ii) la proposition $\mathcal{P}$ **équivalent à** $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-dessous :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Autrement dit :

- (i) Dire que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, c'est dire que **si** $\mathcal{P}$ est vraie, **alors** $\mathcal{Q}$ est vraie (remarquez que si $\mathcal{P}$ est fausse, on ne peut rien dire).
- (ii) Dire que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie revient à dire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont la même valeur de vérité. Ainsi, $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{P}$ sont deux propositions logiquement égales. C'est très faux pour l'implication, où l'ordre compte.

Remarque. Le symbole $\Rightarrow$ est appelé symbole d'implication, le symbole $\Leftrightarrow$ est le symbole d'équivalence.

Remarque. L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée **implication réciproque** de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Remarque. Lorsqu'on sait que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on sait juste que si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ l'est aussi. On ne sait rien de la valeur de vérité de $\mathcal{P}$. Idem pour l'équivalence.

Exercice 29. Donner les implications et les équivalences entre les propositions données, où $x \in \mathbb{R}$ est un réel fixé.

(i) " $2x + 1 = x - 1$ " et " $x + 2 = 0$ ",

(ii) " $x^2 = 4$ " et " $x = 2$ ",

(iii) " $x^2 > 4$ " et " $x \leq -2$ ".

Remarque. Dans l'exercice précédent (i), on a démontré :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x + 2 = 0$$

Il y a ici un parenthésage implicite, **n'hésitez pas à ajouter des parenthèses si vous êtes plus à l'aise**. On aurait pu écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ((2x + 1 = x - 1) \Leftrightarrow (x + 2 = 0))$$

On a donc démontré, pour tout réel x , une équivalence entre deux propositions dépendantes de x .

Remarque. Si $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** pour $\mathcal{Q}$, ou encore que $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** pour $\mathcal{P}$.

Si $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** pour $\mathcal{Q}$ (et réciproquement).

Exercice 30. Que dire de la proposition mathématique : $2 + 2 = 5 \iff 1 + 1 = 0$?

Attention, problème de lecture courante

En mathématique, quand on écrit une équivalence ou une implication (comme " $x \geq 0 \implies e^x \geq 1$ "), c'est pour affirmer que **l'implication** (ou l'équivalence) est vraie, et non pas les proposition en questions. Voici par exemple une démonstration tout à fait valable.

Montrons que l'équation $x^2 + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ n'a pas de solutions.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a l'équivalence suivante :

$$x^2 + 1 = 0 \stackrel{(1)}{\iff} x^2 = -1$$

Or, par théorème, le carré d'un réel est positif : $x^2 \geq 0$. En particulier, $x^2 \neq -1$.

La proposition $x^2 = -1$ est donc fausse. Par l'équivalence (1), $x^2 + 1 = 0$ est fausse, donc x n'est pas solution de l'équation voulue. On a finalement démontré :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$$

c'est-à-dire : l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.

Dans cette démonstration, l'équivalence utilisée (1) est vraie mais les propositions qu'elle relie sont fausses. Ce n'est pas un problème, et c'est comme ça qu'on utilise l'équivalence.

IV. Démonstrations en mathématiques

Remarque. Comme on a commencé à le voir, on peut parfois simplifier des propositions construites à l'aide des connecteurs logiques.

Proposition 31. Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ des propositions. Alors :

- (i) $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff ((\text{non } \mathcal{P}) \text{ ou } \mathcal{Q})$ (caractérisation de l'implication avec **et** et **non**),
- (ii) $\mathcal{P} \text{ ou } (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R}) \iff (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R})$ (distributivité de **ou** sur **et**),
- (iii) $\mathcal{P} \text{ et } (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R}) \iff (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ ou } (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$ (distributivité de **et** sur **ou**).

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, il suffit de la vérifier sur une table de vérité. $\square$

Exercice 32. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide de cette proposition, simplifier les propositions suivantes.

- (i) $x^2 \neq 4$ ou $|x| = 2$,
- (ii) $x^2 = 4$ ou $-2 < x < 2$,
- (iii) $x^2 = 4$ et $(|x| < 1 \text{ ou } x \geq 2)$.

1. Négation d'une proposition

Remarque. $\neg \neg \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$: on dit que la négation est involutive.

a) Lois de De Morgan

Les lois de De Morgan permettent de nier un énoncé formulé avec **et**, **ou**.

Proposition 33. Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

- (i) $\neg(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \iff \neg \mathcal{P} \text{ et } \neg \mathcal{Q}$,
- (ii) $\neg(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \iff \neg \mathcal{P} \text{ ou } \neg \mathcal{Q}$.

Démonstration. faire une table de vérité. $\square$

Exercice 34. Pour comprendre cet énoncé, niez les propositions suivantes définies pour tout réel x .

- (i) Ou bien il ne pleut pas, ou bien je prends mon parapluie. Reformulez cette phrase avec une implication.
- (ii) Le chat est gris et il fait jour.
- (iii) $x > 2$ ou $x < 2$.
- (iv) $-2 < x < 2$.

b) Négation d'une implication, d'une équivalence

Proposition 35. Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ deux propositions. Alors,

$$\neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff (\mathcal{P} \text{ et } \neg \mathcal{Q}).$$

Autrement dit, une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est fausse si, et seulement si, $\mathcal{P}$ est vraie et $\mathcal{Q}$ est fausse.

Démonstration. Table de vérité. $\square$

Remarque. (i) Cette négation doit devenir intuitive : dire que l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse, c'est dire que l'hypothèse P est vraie mais que la conclusion Q est fausse.

(ii) Parlons des équivalences. Voici les traductions les plus courantes, en français, de $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

- (a) $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante pour $\mathcal{Q}$,
- (b) $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$,
- (c) les assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes,
- (d) il est équivalent de dire $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Proposition 36. Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ deux propositions. Alors, $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$. Autrement dit, une équivalence est une double implication.

Remarque. Conséquence : $\neg(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ ou $\neg(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$. Autrement dit, une équivalence est fausse si et seulement si l'une des implication sous-jacente est fausse.

c) Négation et quantificateurs

Un premier exemple : le contraire de “tous les chats sont gris” est “Au moins un chat n'est pas gris”. Le contraire de “tous les moutons ont 4 pattes” est “au moins un mouton n'a pas 4 pattes”.

Proposition 37. Soit $\mathcal{P}$ une proposition paramétrée par un ensemble E . Alors :

- (i) $\neg(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$,
- (ii) $\neg(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$.

Exercice 38. Nier les énoncés suivants, puis donner leur valeur de vérité :

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x > 0$,
- (ii) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 4x + 4 = 0$,
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, x = \sqrt{x^2}$,
- (iv) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2}$.

2. Quelques schémas de démonstration

Tous les théorèmes de logique ci-dessous découlent des définitions, ou s'établissent à l'aide d'une table de vérité.

Remarque. Pensez à nier les énoncés qui vous sont donnés, pour changer l'angle d'attaque du problème.

a) Démontrer une implication : la méthode directe

Proposition 39. Pour démontrer une implication $A \Rightarrow B$, on suppose A vraie et on démontre que B est vraie.

Exemple 40. Soit x un réel. Montrons que si $x > 1$, alors $x^2 > 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. (Une démonstration doit être auto-suffisante et rappeler toutes les notations employées. Sauf, dans un exercice, pour les notations fixées par l'énoncé.)

Supposons $x > 1$. (On suppose l'hypothèse vérifiée. Maintenant, on va faire des déductions avec notre base démonstrative)

Alors, x étant strictement positif, on obtient une nouvelle inégalité en multipliant cette dernière par x : $x^2 > x$. On a donc $x^2 > x > 1$ donc par transitivité, $x^2 > 1$. L'implication est démontrée. $\square$

b) Démontrer une implication : la contraposée

Il est équivalent de dire : “s’il pleut, alors je prends mon parapluie”, et “Si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas”.

Proposition 41. Pour toute propositions A et B ,

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Définition 42. L’implication $\neg B \Rightarrow \neg A$ est appelée implication contraposée de l’implication $A \Rightarrow B$.

Remarque. Quand on doit démontrer une implication, on doit toujours se formuler la contraposée, qui peut être plus facile à conceptualiser.

Exercice 43. Pour tout réel x , soit $\mathcal{P}(x)$: si $x^2 \neq 4$, alors $x \neq 2$. Donner la contraposée de $\mathcal{P}(x)$. Un sens vous semble-t-il plus naturel?

c) Démontrer une équivalence

Pour démontrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on a deux possibilités.

(i) La première, et la plus courante, est de démontrer séparément $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.

(ii) Sinon, on peut raisonner par équivalence, et trouver une chaîne d’énoncés tous équivalents, partant de A et arrivant à B .

Exercice 44. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer $a = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon \geq 0, a \leq \epsilon$.

Remarque. Pour démontrer $A \Leftrightarrow B$, on peut donc montrer en deux temps $A \Rightarrow B$ et $\text{non}A \Rightarrow \text{non}B$ (contraposée de la seconde implication).

Exercice 45. Montrer que pour tout entier n , n est pair si, et seulement si, n^2 est pair.

Exercice 46. Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, que $x > 3 \Leftrightarrow \ln(e^{x-2} + 1) > \ln(1 + e)$.

d) Le modus ponens

Idée. Derrière ce mot savant se cache l’une des techniques les plus anciennes du raisonnement mathématique ou philosophique. Techniquement, vous pouvez y penser comme à une manière générale de faire des étapes dans votre raisonnement.

Proposition 47. Soit B une proposition. Alors, pour toute proposition A :

$$(A \text{ et } (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B.$$

Autrement dit, pour démontrer qu’une proposition B est vraie, on peut trouver une proposition A vraie, et démontrer que $A \Rightarrow B$.

Exemple 48. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrons que $x^2 + 1 \geq 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrons que $x^2 \geq 0$. (*C’est la proposition A de l’énoncé.*)

C’est une conséquence directe de la règle des signes. (*cas simple : A est démontré.*)

Montrons maintenant $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$. (*On va montrer une implication.*)

Supposons $x^2 \geq 0$. Alors, $x^2 + 1 \geq 0 + 1$ (on peut ajouter un réel à chaque membre d’une inégalité), donc $x^2 + 1 \geq 1$.

On a donc montré $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$, ce qui démontre bien : $x^2 + 1 \geq 1$, d’où le résultat. $\square$

Remarque. La démonstration précédente, inutilement découpée pour l'exemple, se démontre de manière plus compacte et naturelle de la manière suivante. C'est toujours un modus ponens, mais enchainé.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la règle des signes, $x^2 \geq 0$. Or:

$$x^2 \geq 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x^2 + 1 \geq 1.$$

Par implication, on a bien démontré $x^2 + 1 \geq 1$. Justification de (1) : on peut ajouter un même réel à chaque membre d'une inégalité pour conserver une inégalité. $\square$

Remarque. J'ai parlé de la notion informelle de base démonstrative : c'est tous les résultats qui sont supposés connus (pour vous : les résultats du chapitre, ou en concours les résultats du programme), vous pouvez vous en servir à n'importe quel moment.

e) Démontrer les propositions quantifiées

Voici les techniques de base pour démontrer des propriétés quantifiées.

(i) Pour démontrer un énoncé de la forme $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$:

- (a) On introduit une nouvelle variable x (nom au choix) élément de E avec l'une des formule : "Soit $x \in E$ ", "Considérons $x \in E$ " ou si on est très à l'aise : " $\forall x \in E$:" à condition d'écrire la suite en langage mathématique (à éviter cette année).
- (b) On cherche à démontrer $\mathcal{P}(x)$. Attention, la seule hypothèse qu'on a sur x est que c'est un élément de E . On ne peut pas du tout choisir x ici, bien au contraire.

(ii) Pour démontrer un énoncé de la forme $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$, on peut (et souvent, on doit) trouver un élément $x \in E$ explicite vérifiant $\mathcal{P}(x)$. Autre méthode très contextuelle : avec un raisonnement par l'absurde.

(iii) Pour démontrer un énoncé de la forme $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$, on procède en deux étapes.

- (a) On montre d'abord l'existence : $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$,
- (b) on montre ensuite l'unicité : $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \Rightarrow x = y$.

Remarque. $(x, y) \in E^2$ signifie $x \in E, y \in E$. On dit alors que (x, y) est un couple d'éléments de E . L'ensemble E^2 est l'ensemble des couples d'éléments de E . On reverra ça plus tard.

Exercice 49. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x$.

f) Utilisation d'un contre exemple

Pour démontrer qu'une proposition de la forme $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ est **fausse**, on exhibe un contre exemple, c'est-à-dire un élément $x \in E$ explicite tel que $\mathcal{P}(x)$ est faux.

Remarque. Cela revient à prouver $\exists x \in E, \neg \mathcal{P}(x)$, qui est bien la négation de notre énoncé, et à utiliser la méthode du e).

Exercice 50. Nier les propositions suivantes et déterminer leur valeur de vérité, avec démonstration.

- (i) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > x, \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y$.

Exercice 51. La proposition suivante est-elle vraie ? Le démontrer.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x.$$

Remarque. Si x est un réel fixé, on tolère l'écriture $\forall y > x$ qui signifie alors $\forall y \in]x, +\infty[$.

3. Raisonnement par l'absurde, disjonction des cas, analyse-synthèse

a) Le raisonnement par l'absurde

Proposition 52. Soit $\mathcal{P}$ une proposition. Alors :

$$(\neg \mathcal{P} \Rightarrow \text{Faux}) \Rightarrow \mathcal{P}.$$

Démonstration. Table de vérité. $\square$

Autrement dit, pour démontrer une proposition $\mathcal{P}$, on peut faire ce qu'on appelle une **démonstration par l'absurde**.

(i) On commence par supposer que $\mathcal{P}$ est faux,

(ii) on raisonne pour démontrer un énoncé faux, que l'on met en valeur (on parle de contradiction). Ceci démontre:

$$\neg \mathcal{P} \Rightarrow \text{Faux}$$

(iii) d'après la proposition précédente, cela démontre $\mathcal{P}$.

Remarque. Attention, au début d'une démonstration par l'absurde, on doit indiquer notre intention. Et il est d'usage d'écrire la suite au conditionnel.

Exemple 53. Soient a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 1$. Montrer que l'un de ces réels est supérieur ou égal à $\frac{1}{3}$.

Démonstration. *Supposons par l'absurde* que a, b et c sont tous inférieurs à $\frac{1}{3}$. On *aurait* alors, $a < \frac{1}{3}, b < \frac{1}{3}, c < \frac{1}{3}$. Si on somme ces inégalités, il vient $a + b + c < 1$ ce qui contredit $a + b + c = 1$. *C'est absurde*, d'où le résultat. $\square$

Exemple 54. Soit n un entier. Montrer par l'absurde que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 55. Supposons qu'il existe des entiers p et q , avec $q > 1$, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ sous forme irréductible.

(i) Montrer que p^2 est pair.

(ii) En déduire que p est pair.

(iii) En déduire que q est pair. Y a-t-il une contradiction?

(iv) Quelle est la conclusion de cet exercice?

b) La disjonction des cas

Proposition 56. Soit $\mathcal{P}$ une proposition. Alors, pour toute proposition A :

$$((A \Rightarrow \mathcal{P}) \text{ et } (\text{non} A \Rightarrow \mathcal{P})) \Rightarrow \mathcal{P}.$$

Ce que dit cette proposition, c'est que pour démontrer une proposition $\mathcal{P}$, on peut choisir une proposition A et démontrer, en deux temps, $A \Rightarrow \mathcal{P}$ puis $\text{non} A \Rightarrow \mathcal{P}$.

Exemple 57. Montrons que pour tout entier n , $n^2 - n$ est pair.

1e cas : si n est pair. Alors, on peut trouver un entier k tel que $n = 2k$. Il vient alors $n^2 - n = (2k)^2 - 2k = 4k^2 - 2k = 2(2k^2 - k)$. Donc $n^2 - n$ est bien pair.

2e cas : sinon, n est impair. Soit alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Il vient $n^2 - n = (2k + 1)^2 - (2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 - 2k - 1 = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$. On a donc bien $n^2 - n$ pair.

Conclusion: Dans tous les cas, $n^2 - n$ est pair, d'où le résultat voulu. $\square$

Exercice 58. Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$.

Rappel (ou pas) : $\max(x, y)$ désigne ici le plus grand réel entre x et y . Pour tout réel a , la valeur absolue de a , notée $|a|$, vaut a si $a \geq 0$ et $-a$ sinon.

Indication : Procéder par disjonction des cas, en fonction de si $x > y$ ou non.

Exercice 59. Soit n un entier. Montrer que $n^2 - n$ est pair.

c) Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse donne une manière de démontrer les énoncés de la forme

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$$

(et vous aide à structurer votre recherche de démonstration). Cette structure opère pour des énoncés plus généraux où il n'y a pas d'unicité demandée (voir TD).

On procède alors en deux temps. Comme on l'a déjà vu, les démonstrations de ces énoncés sont découpées "en deux parties" : une partie où l'on cherche à démontrer l'existence (ici, de $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$), puis une partie où l'on cherche à démontrer **l'unicité** d'un tel élément.

Premier temps : l'analyse. Dans l'analyse, on démontre d'abord l'unicité. Pour cela, **on suppose l'existence**, et c'est là la spécificité du raisonnement par analyse-synthèse. A la fin de l'analyse, on espère avoir des conditions qui déterminent exactement le x recherché.

Second temps : la synthèse. Dans la synthèse, on démontre l'existence. Cette partie est très souvent largement facilitée par l'analyse. Cela nous permet de retomber sur nos pattes (vis à vis de l'hypothèse d'existence formulée dans l'analyse) et de clore la démonstration. Vous remarquerez que pour démontrer l'existence, on donne souvent un x en chair et en os. Cet x a généralement été trouvé pendant l'analyse, et il faut ici vérifier que ce x convient.

Voici un exemple simple où la structure opère.

Exemple 60. Soit $y \in]0, 1[$. Montrons : $\exists! x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{1 + e^x}$.

Analyse : Supposons l'existence voulue, et soit alors x un réel tel que $y = \frac{1}{1 + e^x}$.

Alors, $y = \frac{1}{1 + e^x} \neq 0$ donc $\frac{1}{y} = 1 + e^x$.

Donc $e^x = \frac{1}{y} - 1$.

Donc $(\frac{1}{y} - 1 = e^x > 0)$: $x = \ln(\frac{1}{y} - 1)$.

Conclusion de l'analyse: si un tel x existe, alors il vaut $\ln(\frac{1}{y} - 1)$.

Synthèse :

Idée. On veut poser $x = \ln(\frac{1}{y} - 1)$ pour conclure. On doit s'assurer qu'il n'y a pas de problèmes, puis vérifier qu'il convient bien, c'est-à-dire, en fait, démontrer les implications réciproques de celles utilisées dans l'analyse. Attention à ne pas oublier d'étapes ici.

Montrons que $\frac{1}{y} - 1 > 0$. $0 < y < 1$ par hypothèse, donc par décroissante stricte de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$: $\frac{1}{y} > 1$.

Donc on a bien $\frac{1}{y} - 1 > 0$.

Vu le domaine de définition de la fonction $\ln$, on peut donc poser $x = \ln(\frac{1}{y} - 1)$.

Alors :

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{y} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y.$$

Conclusion de la synthèse : Le réel (bien défini) $x = \ln(\frac{1}{y} - 1)$ vérifie l'égalité voulue.

Conclusion :

- On a montré : $\forall y \in]0, 1[, \exists! x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{1 + e^x}$.
- On a en plus montré que, pour tout $y \in]0, 1[$, l'unique réel x vérifiant $y = \frac{1}{1 + e^x}$ est donné par $x = \ln(\frac{1}{y} - 1)$.

Exercice 61. Le but de cet exercice est de déterminer, si elles existent, les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Analyse Supposons qu'une telle fonction f existe.

- (i) Montrer, en utilisant l'hypothèse sur f avec des valeurs bien choisies de x et y , que $f(0) \in \{0, 1\}$.
- (ii) A l'aide d'autres valeurs bien choisies de x et de y , montrer que l'on a nécessairement $f(0) = 1$.
- (iii) Donner l'expression de $f(x)$.

Synthèse

- (iv) Faire la synthèse, et donner la conclusion de l'exercice.

4. Remarques sur l'utilisation des hypothèses

a) Base démonstrative

La base démonstrative est l'ensemble des résultats que l'on peut utiliser pour faire une démonstration. Au niveau professionnel, il s'agit donc de l'ensemble des résultats mathématiques démontrés par nos pairs,

recensés dans les écrits vérifiés par la communauté mathématique. Pour vous, au niveau d'un concours ou d'un exercice, la base démonstrative est constituée des résultats du cours, des hypothèses données dans l'exercice (ou que vous posez pour établir une démonstration), et aussi des résultats des questions précédentes. A cela, on ajoute souvent un certain nombre d'exercices considérés comme classiques, par exemple un entier est pair si et seulement si son carré l'est.

Il faut bien sûr adapter un peu cela au contexte : si un exercice vous demande de démontrer un théorème du cours, vous ne pouvez pas juste dire que le théorème est vrai car il est dans le cours...

Avoir cette notion en tête vous aidera à résoudre des exercices. Au cours de votre recherche, vous devriez vous demander : quels sont les résultats du cours liés au problème ? Mais aussi, comment puis-je utiliser l'hypothèse donnée par l'exercice ? Les questions précédentes m'aideraient-elles ?

Retenez bien ceci : en CPGE, on ne vous donne pas d'hypothèses inutiles. D'une part, se demander comment exploiter une hypothèse est souvent fructueux. D'autre part, si vous remarquez que vous n'avez pas utilisé une hypothèse dans un exercice, il y a sûrement une faute quelque part.

b) Utilisation des hypothèses quantifiées

Pour utiliser une hypothèse de la forme $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$, vous devez :

- (i) être en train de manipuler une variable (par exemple notée t) vérifiant $t \in E$,
- (ii) annoncer l'utilisation par une formulation type : "Or : $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ ",
- (iii) vous pouvez alors conclure que $\mathcal{P}(t)$ est vraie.

Pour utiliser une hypothèse de la forme $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$, vous devez :

- (i) annoncer l'utilisation par une formule type : "Or : $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ ",
- (ii) vous pouvez alors introduire une nouvelle variable $x \in E$ vérifiant $\mathcal{P}(x)$ avec une formulation comme "Soit donc $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ ", ou "on dispose de $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ ", puis travailler avec.

Pour utiliser une hypothèse de la forme $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$, vous pouvez :

- (i) utiliser l'existence, c'est à dire $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ (point précédent), et
- (ii) utiliser l'unicité donnée par l'énoncé. Pour cela, un moyen courant est d'avoir deux variables $s \in E$ et $t \in E$ vérifiant toute deux la propriété $\mathcal{P}$, et vous pouvez alors conclure $s = t$.
- (iii) Par ailleurs, dans certains cas, on utilise $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ pour définir un élément de manière unique, avec une formule comme : "Notons x l'unique élément de E tel que $\mathcal{P}(x)$ ".

c) Inclusions et égalités d'ensembles.

Comment démontrer une inclusion ou une égalité d'ensemble ?

Méthode.

Soient A et B deux ensembles. Pour démontrer l'inclusion $A \subset B$, on doit démontrer :

$$\forall x \in A, x \in B.$$

On commence donc par considérer un élément a quelconque de A ("Soit $a \in A$ ") et on cherche à démontrer que $a \in B$.

Exemple 62. On pose $A = \{(4t + 1, t + 2) | t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 4y = -7\}$.

- (i) Montrons que $A \subset B$.
- (ii) Montrons $B \subset A$.

Méthode.

Soient A et B deux ensembles. Pour démontrer l'égalité $A = B$, on montre en deux temps $A \subset B$ et $B \subset A$ selon la méthode précédente.
Alternativement, on pourra plus tard procéder par chaîne d'équivalence.

Exemple 63. Montrons que, dans l'exemple précédent, $A = B$.

Exercice 64. Montrer que $\{t \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}_-, t = y^2\} = \mathbb{R}_+$.

V. Le raisonnement par récurrence

C'est une conséquence de la construction de $\mathbb{N}$ (HP+). Vous devez apprendre précisément le modèle de rédaction enseigné, les démonstrations par récurrence sont très courantes.

1. Le principe de récurrence

Proposition 65. Soit $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une proposition paramétrée par les entiers. Alors :

$$(P(0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1))) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, P(n)).$$

Autrement dit, pour démontrer une proposition de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$, on peut procéder en deux temps :

- (i) **L'initialisation** : on démontre $P(0)$.
- (ii) **L'hérédité** : on considère un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque, et on démontre $P(n) \implies P(n+1)$.

Exemple 66. Démontrons par récurrence l'énoncé suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque. La récurrence ne s'applique que pour les énoncés quantifiés sur $\mathbb{N}$! N'essayez même pas de démontrer par récurrence un énoncé comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$$

car ça n'a aucun sens (il n'y a pas d'entier dans l'énoncé...).

Remarque. On peut faire une démonstration par récurrence **à partir de n'importe quel rang** (on peut faire l'initialisation avec un autre entier que 0 si besoin). Par exemple, dans l'exemple ci-dessous, la propriété à démontrer n'est vraie qu'à partir du rang $n = 4$, et on peut donc procéder par récurrence à partir de 4 (on initialise à $n = 4$ et prends, dans l'hérédité, un entier $n \geq 4$).

Exemple 67. Montrons par récurrence : $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$.

Remarque. On n'insiste pas pour rien : vous devez avoir un modèle de rédaction parfait des récurrences dans la peau. Voici les étapes indispensables.

- Annoncer que vous procédez par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$.
- Donnez un nom à l'hypothèse de récurrence, c'est à dire à la proposition que vous cherchez à démontrer pour tout entier. Guillemets obligatoires.
Posons, pour tout entier $n \geq 4$, $P(n) : "2^n \leq n!"$.
- Annoncez l'initialisation, et démontrez la.
- Concluez l'initialisation clairement ("d'où l'initialisation").
- Annoncez l'hérédité.
- Introduisez un entier n quelconque parmi les entiers concernés.
Soit $n \geq 4$ un entier.
- Démontrez $P(n) \implies P(n+1)$.
Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$...
- Une fois ceci fait, concluez l'hérédité clairement ("d'où l'hérédité").
- En DS : rajoutez une conclusion à encadrer ("Par récurrence, on a bien montré ...").

Remarque. Dans une démonstration par récurrence, vous devez impérativement mettre en évidence l'utilisation de l'hypothèse de récurrence. Dans l'hérédité, vous démontrez $P(n) \implies P(n+1)$. Pour cela, vous supposez $P(n)$ vrai pour démontrer $P(n+1)$. L'utilisation de l'hypothèse de récurrence, c'est le moment où vous utilisez $P(n)$ dans la démonstration de $P(n+1)$.

Remarque. Le symbole $\sum$ est employé pour décrire des sommes finies d'une longueur donnée (éventuellement "inconnue"). Par exemple, on note :

$$\sum_{k=0}^{2023} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 2022 + 2023$$

$$\sum_{k=0}^{101} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2 + 101^2 = 0 + 1 + 4 + \dots + 10000 + 10201$$

$$\sum_{k=2}^7 2k + 1 = (2 \times 2 + 1) + (2 \times 3 + 1) + (2 \times 4 + 1) + (2 \times 5 + 1) + (2 \times 6 + 1) + (2 \times 7 + 1)$$

Et si n est un entier défini auparavant (éventuellement de manière quelconque, avec un "Soit $n \in \mathbb{N}$ "), on a par exemple :

$$\sum_{r=0}^n 2r = 2 \times 0 + 2 \times 1 + \dots + 2n.$$

On fera un chapitre sur ce thème, mais vous pouvez déjà constater :

- (i) Une somme écrite $\sum_{k=n_0}^n f(k)$ possède une borne inférieure n_0 et une borne supérieure n . La borne inférieure doit être plus petite que la borne supérieure,
- (ii) La "formule" $f(k)$ décrit ce qu'on appelle le terme général de la somme,
- (iii) La lettre k (appelée variable de sommation) doit ne pas être introduite en amont, et ne fixe aucune notation. On dit que c'est une "variable locale de la somme".
- (iv) Pour les récurrences, on utilise majoritairement la "formule" :

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} f(k) = f(n+1) + \sum_{k=n_0}^n f(k).$$

2. Variantes de la récurrence

On peut procéder à une récurrence sur plusieurs rangs.

Réurrence sur deux rangs

Pour démontrer un énoncé type " $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ " par récurrence sur deux rangs, on adapte la récurrence comme suit :

- (i) Initialisation : on démontre le résultat pour les **deux** premiers rangs : on démontre donc ici $P(0)$ et $P(1)$.
- (ii) Hérédité : on s'autorise à utiliser l'hypothèse de récurrence sur deux rangs : pour n entier fixé de manière quelconque, on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$ et on démontre $P(n+2)$.

Exemple 68. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle donnée par : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 3^n.$$

Remarque. Il n'y a pas de limite à ce principe de récurrence, on peut faire une démonstration par récurrence sur 14 rangs à partir de 100...

La récurrence forte (limite du programme)

Pour démontrer " $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ " par récurrence forte, on procède comme par récurrence, mais on adapte l'hérédité.

Dans l'hérédité d'une récurrence forte, on considère un entier $n \in \mathbb{N}$, et on démontre :

$$(P(0) \text{ et } P(1) \text{ et } P(2) \text{ et } \dots \text{ et } P(n)) \implies P(n+1).$$

C'est plus puissant qu'une récurrence, mais on en a rarement besoin.

Exemple 69. Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Montrons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n.$$

Exercice 70. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 1$.

Exercice 71. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout entier n . Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice 72. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite donnée par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$.