

Programme de colle n° 2 : Logique, ensembles et raisonnements. Début du chapitre sur les fonctions réelles.

Semaine du lundi 22 septembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Fin du chapitre 1

2.1 Considérations à effectuer pour démontrer un énoncé de la forme $\exists x \in E, P(x)$, $\exists x \in E, P(x)$ ou $\exists! x \in E, P(x)$. Utilisation d'un contre-exemple.

2.2 Raisonnements par l'absurde.

2.3 Raisonnements par disjonction des cas.

2.4 Raisonnements par analyse-synthèse.

2.5 Remarque sur l'utilisation des énoncés quantifiés.

2.6 Démonstration d'une inclusion, d'une égalité d'ensembles.

2.7 Raisonnements par récurrence, par récurrence sur deux rangs, par récurrence forte.

Aucune tolérance sur la rédaction des récurrences. La récurrence forte étant à la limite du programme, tout exercice utilisant nécessairement cette méthode l'indiquera dans l'énoncé.

Fonctions réelles de la variable réelle

2.8 Notion de fonction réelle de la variable réelle. Notions d'ensemble de définition, d'image et d'antécédent.

2.9 Fonctions données par une formule et recherche du domaine de définition.

2.10 Graphe d'une fonction réelle.

2.11 Vocabulaire : fonction définie "en un réel", définie "sur une partie de $\mathbb{R}$ ".

2.12 Notion de fonction monotone, strictement monotone sur une partie de $\mathbb{R}$. Toute fonction strictement (dé)croissante (sur $I \subset \mathbb{R}$) est (dé)croissante (sur I).

Propositions 23 et 24, obtenues par contraposition des définitions précédentes. Équivalences d'inégalités obtenues lors de l'application d'une fonction strictement monotone (prop. 25).

Python

2.13 Types integer, float, string, bool, list et tuple. Méthodes de base de ces types (opérations, concaténation, opérateurs logiques, longueur d'une liste, accès aux entrées d'une liste, modification d'une entrée liste). Affectation de variables. Tests if, boucles for.

Quelques questions de cours

Rappel aux élèves : chaque semaine, le programme de colle de la semaine précédente est exigible.

1. Nier et démontrer la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > x, \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y$. On expliquera l'idée de cette démonstration à l'aide d'un dessin.
2. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$.
4. À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
5. Montrer que $\{(4t + 1, t + 2) | t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 4y = -7\}$.
6. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
7. Montrer par récurrence que la suite u définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 3^n$. Interrogation : aucune discussion sur la bonne définition de la suite u n'est attendue.
8. Définir la notion de fonction réelle de la variable réelle. Déterminer le domaine de définition de la fonction donnée par

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ (toute variante similaire - donc assez simple - possible).

9. Définir les notions de fonction croissante, décroissante, strictement croissante et strictement décroissante sur une partie I de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction strictement croissante sur une partie I de $\mathbb{R}$ est croissante sur I .
10. Énoncer la proposition 25, relative à l'application d'une fonction strictement monotone à une inégalité. Démontrer le point concernant les fonctions strictement croissantes.
11. Décrire l'effet du code **Python** suivant (toute variante similaire possible) :

```
1 x=10
2 y=x**2
3 h=x+y+x/10
4 if y<x:
5     h=h-10
6     print(y+x)
7 else:
8     h=2*h
9     print(h)
```