

TD de mathématiques n°2 : Généralités sur les fonctions réelles

Pour commencer

Propriétés des fonctions réelles

Exercice 1 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (a) \ x \mapsto \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} & (c) \ x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1} & (e) \ x \mapsto \sqrt{x+\frac{1}{x}} \\
 (b) \ x \mapsto \frac{x-1}{x-1-\frac{1}{x-1}} & (d) \ x \mapsto \sqrt{x^2-x-2} & (f) \ x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})
 \end{array}$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles.

- (a) Montrer que si f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, alors $f+g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer que si f et g sont croissantes et positives sur $\mathbb{R}$, alors $f \times g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- (c) Montrer que si f et g sont décroissantes sur $\mathbb{R}$, alors $f+g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- (d) Montrer que si f et g sont décroissantes et positives sur $\mathbb{R}$, alors $f \times g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Montrer que $f+g$ et $f \times g$ sont bornées.

Exercice 4 On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- (a) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la valeur de ce minimum.
- (b) La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 5 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Calculer $f(x) + 1$ et $f(x) - 1$ pour tout réel x , puis en déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+t) \leq t$. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{x}{b}$. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer la valeur de ce minimum. On pourra utiliser un tableau de variation.

Exercice 8 Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{1+e^{-x}}{1+e^x}$ n'est ni paire ni impaire.

Exercice 9 *Parité, imparité : on parle des "propriétés de symétrie".* Étudier les propriétés de symétrie de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Exercice 10 On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Étudier les éventuelles propriétés de symétrie de f .

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire. Étudier les propriétés de symétrie des fonctions $x \mapsto xf(x)$ et $x \mapsto x^2f(x)$.

Exercice 12 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions ci-dessous (on précisera les domaines de définition et de dérivabilité).

$$\begin{array}{lll}
 (a) \ x \mapsto e^{x \ln x} & (c) \ x \mapsto e^{\sqrt{x}} & (e) \ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\
 (b) \ x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} & (d) \ x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) & (f) \ x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}
 \end{array}$$

Exercice 13

- (a) Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ à l'aide d'une étude de variations.
- (b) En déduire que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$. *Indication : on pourra appliquer le résultat précédent à $-\frac{x}{1+x}$.*

Exercice 14 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1+x+\frac{x^2}{2} \leq e^x$ à l'aide d'une étude de variations.

Exercice 15 On considère les fonctions f et g définies par les formules $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Déterminer les domaines de définition $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g, \mathcal{D}_{g \circ f}$ de f, g et $g \circ f$ et calculer $g \circ f$. Que peut-on dire de $f \circ g$?

Exercice 16 Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$ et écrire la formule donnant cette fonction. Même consigne pour la fonction composée $f \circ g$.

- (a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$ (c) $f(x) = 8x^2 - 6x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$
- (b) $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = x-1$ (d) $f(x) = \ln(e^x+1)$ et $g(x) = \ln(e^x-1)$

Exercice 17 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- (a) Montrer que si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
- (b) Montrer que si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire.
- (c) Montrer que si f est impaire et g est impaire, alors $g \circ f$ est impaire.

Exercice 18 On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = (x^2-1)\sqrt{4-x^2}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f .
- (b) Étudier les éventuelles propriétés de symétrie de f .
- (c) Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'$.
- (d) En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$ et montrer que f est bornée sur $\mathcal{D}$.

Valeur absolue

Exercice 19 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- (a) $|x-2| = 1$ (c) $|2x^2+x-1| = 3-x$ (e) $|x^2+x-2| \geq x$
- (b) $|x^2-1| = x+5$ (d) $|x-2| \leq x$ (f) $|x^2-3x+2| \leq |x-2|$

Exercice 20 Tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes :

- (a) $x \mapsto |x+2|$ (b) $x \mapsto |x^2-x-2|$ (c) $x \mapsto |\ln x|$

Exercice 21 On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = |x - \frac{1}{x}|$.

- (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et étudier ses propriétés de symétrie.
- (b) Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.
- (c) Étudier les variations de f sur son domaine.
- (d) Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.

Exercice 22 Soit $x \in [-1, 1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{x^n}{n^\alpha}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée en montrant :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq M.$$

Partie entière

Exercice 23 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

Exercice 24 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n = 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Exercice 25 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $\lfloor 2x \rfloor = 1$

(c) $\lfloor x^2 + 1 \rfloor = 2$

(e) $\lfloor x^2 - 4 \rfloor < 5$

(b) $\lfloor 3x + 1 \rfloor = 2$

(d) $\lfloor 2x - 1 \rfloor \geq 2$

(f) $\lfloor 4x(1 - x) \rfloor > 0$

Exercice 26 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (on dit que F est la fonction partie fractionnaire).

(a) Montrer que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x + 1) = F(x)$.

(c) Tracer la représentation graphique de la fonction F sur l'intervalle $[0, 1[$.

(d) En déduire la représentation graphique de la fonction F sur l'intervalle $[-5, 5]$.

Puissances généralisées

Exercice 27 Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 28 On considère la fonction f définie par $f(x) = (1 + x)^x$.

(a) Rappeler la définition de la quantité $(1 + x)^x$ et en déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

(b) Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$. En déduire le meilleur minorant possible de f sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 29 Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^{\ln x}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 30 Étudier les variations de la fonction définie par la formule $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ sur son domaine de définition et en déduire qu'il s'agit d'une fonction bornée. En déduire la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 31 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = (x + 1)^\alpha - x^\alpha$.

Étudier le signe et les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour continuer

Propriétés des fonctions réelles

Exercice 32 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes.

(a) $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}$

(c) $x \mapsto \ln(1 - x) + \ln(1 + x)$

(b) $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

(d) $x \mapsto \ln(x^2 + x - 12)$

Exercice 33 Montrer que la fonction définie par la formule $f(x) = e^{-x \ln x}$ est bornée sur son domaine. On pourra utiliser un tableau de variation.

Exercice 34 Montrer que la fonction définie par la formule $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$ est bornée sur son domaine.

Exercice 35 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, (-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 1$.

Étudier les propriétés de symétrie de la fonction g définie par la formule $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Exercice 36 Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique par rapport à l'origine et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(a) Montrer qu'il existe une unique fonction $p : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction $i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que p est paire, i est impaire et $f = p + i$.

(b) Déterminer explicitement p et i dans le cas où f est définie sur $] -1, 1[$ par la formule $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 37 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x + 1)^n + (x - 1)^n$ et $g(x) = (x + 1)^n - (x - 1)^n$. Étudier les propriétés de symétrie de f et g .

Exercice 38 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions ci-dessous (on précisera les domaines de définition et de dérivabilité).

- (a) $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ (c) $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (e) $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
 (b) $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$ (d) $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (f) $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 1}$

Exercice 39

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ à l'aide d'une étude de variations.
 (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \leq 1 + xe^x$. *Indication : on pourra appliquer le résultat précédent.*

Exercice 40 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ à l'aide d'une étude de variations.

Exercice 41 Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$ et écrire la formule donnant cette fonction. Même consigne pour la fonction composée $f \circ g$.

- (a) $f(x) = \frac{x+2}{1+2x}$ et $g(x) = \frac{x-2}{1-2x}$ (c) $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$ et $g(x) = \frac{3x+5}{2-x}$
 (b) $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^{-x}$ (d) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = \ln(x)$

Valeur absolue

Exercice 42 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- (a) $|3 - x| = x - 1$ (e) $|1 - x^2| = |x + 1|$ (i) $|x - 1| \geq |x + 1|$
 (b) $|x + 1| = |2x - 1|$ (f) $|2x - 3| \geq 1$ (j) $|1 - x^2| \leq 2x$
 (c) $|2x + 1| = 1 - x$ (g) $|x + 3| > |3x + 1|$
 (d) $|3 - x^2| = 1$ (h) $|3x + 1| \leq 4$

Exercice 43 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- (a) Montrer que $|x| \leq |x - y| + |y|$ et $|y| \leq |x - y| + |x|$.
 (b) En déduire que $|x - y| \geq ||x| - |y||$ (seconde inégalité triangulaire).

Exercice 44 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{-|x|}$.

- (a) Étudier les propriétés de symétrie de f .
 (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.
 (c) En déduire le signe et les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis tracer sa courbe représentative.

Exercice 45 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = |x - 2| + |x| + |x + 2|$.

En distinguant des cas de manière appropriée, exprimer la fonction f sans utiliser de valeur absolue.

Tracer ensuite soigneusement la représentation graphique de la fonction f .

Résoudre enfin les équations $f(x) = -2$ et $f(x) = 6$ ainsi que les inéquations $f(x) < 5$ et $6 \leq f(x) < 8$.

Exercice 46 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x - a| - |x - b|.$$

Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ (déterminer le meilleur minorant et le meilleur majorant).

Exercice 47 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x - a| + |x - b|.$$

- (a) En distinguant trois cas appropriés, donner une expression de $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.
 (b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe représentative de f .
 (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - a| + |x - b| \geq b - a$.

Partie entière

Exercice 48 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 49 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- | | | |
|--|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $\lfloor 1 - x^2 \rfloor = 0$ | (e) $\lfloor x \rfloor = x$ | (i) $2\lfloor x + 1 \rfloor \leq 3$ |
| (b) $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$ | (f) $\lfloor -x \rfloor < 1$ | (j) $4\lfloor x^2 + x \rfloor \leq 5$ |
| (c) $\lfloor 1 - 2x \rfloor = -3$ | (g) $\lfloor 2 - x \rfloor \leq 1$ | |
| (d) $\lfloor x^2 + 2x - 3 \rfloor = 0$ | (h) $\lfloor x^2 + x - 1 \rfloor > 0$ | |

Exercice 50 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)(1 - x + \lfloor x \rfloor)$.

- (a) Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, 1]$.
- (b) Étudier les éventuelles propriétés de symétrie de f . Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.
- (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$. En déduire le tracé complet de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-5, 5]$.

Puissances généralisées

Exercice 51 Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^{x^2}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 52 Étudier les variations de la fonction $f(x) = (x^x)^2$ sur son ensemble de définition.

Exercice 53 On souhaite déterminer, s'il en existe, les valeurs $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $a < b$ telles que $a^b = b^a$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- (a) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a^b = b^a \iff f(a) = f(b)$.
- (b) (i) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
(ii) Dresser également le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (c) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < b$. À l'aide de la question (b), montrer que $f(a) = f(b) \implies a = 2$.
- (d) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}, 2^n > n^2$.
- (e) Conclure en donnant toutes les solutions du problème posé.