Programme de colle n^o 3 : Fonctions réelles de la variable réelle.

*Semaine du lundi **29 septembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Propriétés des fonctions réelles (suite du PC précédent).

3.1 Notion de fonction injective sur une partie I de $\mathbb{R}$. Toute fonction strictement monotone (sur I) est injective (sur I).

3.2 Parties de $\mathbb{R}$ symétriques par rapport à 0. Fonctions paires ou impaires. Propriété de symétrie du graphe des d'une fonction paire ou impaire.

3.3 Fonction majorée, minorée ou bornée sur une partie de $\mathbb{R}$. Caractérisation : f est bornée sur I si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$.

3.4 Maximum, minimum et extremum d'une fonction réelle (sur une partie I de $\mathbb{R}$).

La notion d'extremum local sera vue plus tard.

Opérations sur les fonctions réelles

3.5 Somme, produit et quotient de fonctions réelles. Multiplication scalaire. Composition de fonctions réelles, domaine de définition de la composée de fonctions réelles.

Élèves : la remarque suivant la déf. 46 donnant le domaine d'une composée est à connaitre.

3.6 La somme de fonctions toutes deux (strictement) croissantes, (strictement) décroissante, paires, impaires, majorées, minorées ou bornées a la même propriété (prop. 48). De nombreuses propriétés similaires existent, il est préférable de savoir les retrouver. Attention aux énoncés faux : le produit de deux fonctions croissantes n'est pas forcément une fonction croissante.

3.7 Composition et monotonie, composition et propriétés de symétries. Si g est majorée minorée ou bornée, alors il en est de même pour $g \circ f$.

Rappels sur la dérivation (démonstrations au second semestre)

3.8 Dérivabilité d'une fonction réelle en un point de son domaine de définition. Dérivabilité sur une partie de $\mathbb{R}$, fonction dérivée et domaine de définition de la dérivée.

3.9 La somme et le produit de fonctions dérivables sur une partie D de $\mathbb{R}$ est dérivable sur D. Propriété similaire pour le quotient de fonctions et pour la multiplication scalaire. Formules.

3.10 Si f est (définie et) dérivable en x et si g est (définie et) dérivable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est (définie et) dérivable en x. Formule donnant $(g \circ f)'(x)$. Si f et g sont dérivables sur leur domaine de définition, alors il en est de même de $g \circ f$.

Les élèves ne sont pas attendus sur des études de dérivabilité ponctuelle faisant intervenir la définition avec limite.

3.11 Caractérisation de la monotonie d'une fonction dérivable **sur un intervalle** à l'aide du signe de sa dérivée. Condition suffisante de monotonie stricte.

3.12 Condition nécessaire d'extremum : si f est dérivable sur un intervalle ouvert I, et si f admet un extremum en a sur I, alors $f'(a) = 0$. Contre exemple lorsque I n'est pas ouvert.

3.13 Tangente à la courbe d'une fonction en un point de dérivabilité.

Recherche d'antécédent (démonstrations au S2)

3.14 ensemble image $f(D)$ d'une partie D de $\mathbb{R}$ par une fonction f définie sur D. Si f est continue et croissante sur un segment $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Version décroissante.

Les énoncés de ce type sont donnés pour un segment, mais les élèves doivent pouvoir s'en servir librement pour des intervalles ouverts ou semi ouverts (utilisation du tableau de variation). Continuité : boite noire (se référer aux fonctions usuelles, utiliser "toute fonction dérivable est continue").

3.15 Lien entre injectivité et antécédents. Version ad-hoc tu théorème de la bijection monotone : si f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors pour tout réel y, y admet un antécédent par f sur $[a, b]$ ssi $y \in [f(a), f(b)]$ et dans ce cas, y admet un unique antécédent par f sur $[a, b]$. Version strictement

La notion de bijectivité n'a pas encore été vue, d'où la version ad-hoc non nommée. Les élèves peuvent adapter cet énoncé pour des intervalles ouverts ou semi ouverts con-

décroissante.

formément à l'information présentée sur un tableau de variation. Les limites seront systématiquement données par l'interrogation.

3.16 Exercice de synthèse : étude de fonction, utilisation du tableau de variation pour tracer l'allure d'un graphe, résoudre des problèmes liés au caractère borné et aux extrema d'une fonction, et pour résoudre des problèmes de recherche d'antécédents.

Cet exercice sera corrigé lundi.

À finir : lexique des fonctions usuelles et de leurs propriétés

3.17 Propriétés des fonctions polynômiales, de l'exponentielle, du logarithme.

3.18 Sera fait lundi : racine carrée, puissances généralisées, valeur absolue, partie entière, exponentielle de base a.

Python

3.19 Utilisation de variables, de boucles for et de test conditionnels pour des premiers exercices classiques : calculs de sommes, de produits, de termes d'une suite définie par une relation de récurrence (de rang 1).

Module numpy, définition de fonctions et boucles while la semaine prochaine.

Quelques questions de cours

1. Énoncer et démontrer la proposition liant la notion de fonction injective aux propriétés de monotonie stricte.
2. Définir la notion de fonction paire, de fonction impaire. Montrer que si f et impaire et si g est paire, alors $g \circ f$ est paire.
3. Définir "f admet un maximum sur I" et "f est majorée sur I". Montrer que $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$ est bornée, admet un minimum, mais pas de maximum.
4. Soient f et g deux fonctions réelles. Définir les fonctions $f+g$ et f/g et $g \circ f$ (deux versions pour $g \circ f$: la définition 46 et la remarque précédent l'exemple 47).
5. Montrer que si f et g sont deux fonctions strictement décroissantes sur une partie I de $\mathbb{R}$, alors il en est de même pour $f+g$. Toute variante similaire liée à la monotonie et faisant intervenir la somme ou la composition possible.
6. Énoncer et démontrer la caractérisation des fonctions bornées faisant intervenir la valeur absolue.
7. Donner sans démonstration le domaine et la forme des dérivées des fonctions $x \mapsto e^{u(x)}$, $x \mapsto \ln(u(x))$ et $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, où u est une fonction dérivable sur son domaine de définition D. Déterminer le domaine de dérivabilité et la fonction dérivée de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$.
8. Définir la tangente à la courbe d'une fonction en un de ses point de dérivabilité. Donner une représentation graphique, en expliquant les éléments intervenant dans cette définition. Énoncer la condition nécessaire d'extremum vue en cours (prop. 64). Représenter la situation sur un dessin, et expliquer (dessin) que l'hypothèse d'ouverture de l'intervalle est nécessaire.
9. Énoncer la version ad-hoc du théorème de la bijection monotone vue en cours (prop. 72). Déterminer le nombre d'antécédent de 3 par la fonction $x \mapsto x^3 - 6x + 1$. Toute variante (très) similaire possible.
10. Énoncer les propriétés de l'exponentielle et du logarithme, et tracer l'allure de leur graphe.
11. Donner un code Python permettant de calculer le produit $(1+2)(1+2+3)(1+2+3+4)...(1+2+3+...+16)$. Toute variante similaire possible.