Programme de colle n^o 4 : Fonctions réelles de la variable réelle (fin), Sommes et produits (début).

*Semaine du lundi **6 octobre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Fonctions usuelles (suite)

4.1 Proposition permettant de définir la racine carrée d'un réel positif. Définition de $x \mapsto \sqrt{x}$. Monotonie et dérivée (admis). Règles de calcul, quantité conjuguée.

La notion de bijectivité n'est pas encore présente à ce stade.

4.2 Fonctions puissances généralisées. Dérivabilité et monotonie. Règles de calcul.

À ce stade, $x \mapsto x^\alpha$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4.3 Fonction valeur absolue, dérivabilité et dérivée (non dérivabilité en 0 admise). Règles de calcul et équivalences usuelles pour manier des égalités/inégalités avec valeur absolue. Inégalités triangulaires. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : donné mais hors programme.

La première inégalité triangulaire a été démontrée, la seconde admise.

4.4 Définition de la partie entière à l'aide d'une proposition admise (mais très claire). Monotonie, constance sur les intervalles de la forme $[n, n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$. Équivalences et formules usuelles pour manier les égalités/inégalités faisant intervenir la partie entière.

4.5 Fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$: définition. Étude suggérée par un exercice (non corrigé).

4.6 Annexe : interprétation graphique des égalités et inégalités.

Sommes et produits

4.7 Définition du symbole $\sum$. Vocabulaire (bornes, borne inférieure, borne supérieure, indice de sommation). L'indice de sommation est une variable locale (ou muette).

4.8 Notation relative aux intervalles entiers. Notations équivalentes : $\sum_{k=p}^{n}$, $\sum_{p \leq k \leq n}$ et $\sum_{k \in [\![p,n]\!]}$. Cardinal de l'intervalle entier $[\![p,n]\!]$. Sommes constantes.

4.9 Premières propriétés : linéarité de la somme, relation de Chasles. Sommes usuelles : $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

4.10 Changements d'indice "par décalage". Sommes télescopiques. Changement d'indice "avec retournement".

4.11 Sommes géométriques.

4.12 Sommes indexées par un ensemble fini. Sommes avec contrainte $\sum_{\substack{i \in I \\ P(i)}} a_i$ où $(P(i))_i$ est une propriété à paramètre sur I. Manipulations relatives aux sommes sur les indices pairs ou impairs.

On utilise la notion "maison" d'énumération sans répétition pour les sommes sur un ensemble fini.

4.13 Définition du symbole $\prod$. Produits constants, propriétés du produit ($\prod_{k=p}^{n}(a_k b_k)$, $\prod_{k=p}^{b} a_k^\lambda$, relation de Chasles, produits télescopiques, changements d'indice).

4.14 Sera fait lundi : propriétés additionnelles des sommes et produits : logarithme et exponentielle, somme d'inégalités, produits d'inégalités à membres tous positifs, comportement de la valeur absolue, développement généralisé et doubles sommes.

N'est pas au programme de cette semaine.

Python

4.15 Import du module `numpy`, fonctions et constantes usuelles de ce module. Notion de fonction informatique. Notion de "renvoi", utilisation de `return`.

Quelques questions de cours

1. Énoncer la définition de la racine carrée d'un réel positif, ainsi que la proposition nécessaire à la bonne définition de celle-ci. Démontrer cette proposition. Simplifier $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.
2. Définir la notion de puissance généralisée. Donner le domaine de définition de $x \mapsto x^\alpha$ en fonction de α. Énoncer et démontrer le résultat portant sur la dérivation de ces fonctions, lorsque α est non entier. Compléter et démontrer : "$x^\alpha x^\beta = ...$".
3. Énoncer les inégalités triangulaires, démontrer la première. Compléter et démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = ...$
4. Énoncer la définition de la partie entière d'un réel, ainsi que toute proposition nécessaire à la bonne définition de celle-ci. Compléter : $\forall x \in \ldots, \forall y \in \ldots, \lfloor x \rfloor \leq y \iff \ldots$, toute variante similaire possible (prop 100). Représenter cette équivalence à l'aide du graphe de la partie entière.
5. Énoncer et démontrer (avec points de suspensions) la propriété de linéarité de la somme. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$, toute variante similaire possible.
6. Énoncer et démontrer (avec points de suspension) la relation de Chasles. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n}^{2n} k$.
7. Compléter et démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \ldots$. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$.
8. Énoncer et démontrer (avec points de suspensions) le résultat portant sur les changement d'indice par décalage. Calculer $\sum_{k=4}^{n}(k-4)^2$ en fonction de $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.
9. Énoncer et démontrer (sans points de suspensions) la formule portant sur les sommes téléscopiques. Calculer $\sum_{k=1}^{10} \ln(\frac{k+1}{k})$.
10. Énoncer et démontrer le résultat portant sur les sommes géométriques.