

TD de mathématiques n°3 : Sommes et produits

Pour commencer

Exercice 1 Écrire sans le symbole $\sum$ ou $\prod$ les quantités suivantes (on ne demande pas de calculer leurs valeurs) :

(a) $\sum_{k=1}^7 4$	(e) $\sum_{k=97}^{105} 2$	(i) $\sum_{k=1}^{10} (2k-1)$	(m) $\prod_{k=1}^5 2$
(b) $\sum_{k=0}^9 (2k+1)$	(f) $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k$	(j) $\sum_{k=0}^{10} 2^k$	(n) $\prod_{k=1}^5 2^k$
(c) $\sum_{k=1}^8 \left(-\frac{1}{2}\right)^k$	(g) $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k}$	(k) $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} + 1$	(o) $\prod_{k=0}^7 (2k+1)$
(d) $\sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{k} + 1\right)$	(h) $\sum_{k=1}^{10} k(k-1)$	(l) $\sum_{k=1}^{10} k^2$	(p) $\prod_{k=1}^6 \frac{k-1}{k}$

Exercice 2 Déterminer explicitement les valeurs des sommes suivantes en fonction de n :

(a) $\sum_{k=1}^n -1$	(c) $\sum_{k=1}^n (4k+1)$	(e) $\sum_{k=2}^{n+1} k^2$	(g) $\sum_{k=0}^n (2k+1)^2$	(i) $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2 \times 3^k}$
(b) $\sum_{k=2}^{n+1} k$	(d) $\sum_{k=1}^n 2(k+1)$	(f) $\sum_{k=1}^n (k^2+2k+1)$	(h) $\sum_{k=1}^n (-2)^k$	(j) $\sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}}$

Exercice 3 Déterminer explicitement les valeurs des sommes suivantes en fonction de n :

(a) $\sum_{k=1}^n (k+1)^2 - k^2$	(c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$	(e) $\sum_{k=1}^n (-1)^k \ln(k(k+1))$
(b) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$	(d) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$	(f) $\sum_{k=0}^n (-1)^k (2k+1)$

Exercice 4 Démontrer les propositions suivantes :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$	(d) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (2k+1)^3 = (n+1)^2 (2n^2 + 4n + 1)$
(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$	(e) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k \times (-1)^k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$
(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	(f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Exercice 5 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en fonction de n .

Exercice 6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

Exercice 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Retrouver ce résultat en calculant $(a - b)S_n$. En déduire une identité donnant $a^n - b^n$, généralisant :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Exercice 8

(a) Déterminer la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} - (k+1)x^k$ en fonction de x et de n .

(b) En déduire que $(1 - x) \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = 1 - (n+1)x^n + \sum_{k=1}^n x^k$.

(c) En déduire, la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ en fonction de x et de n .

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer les valeurs des produits suivants :

$$\begin{array}{llll} (a) \prod_{k=1}^n 4^k & (c) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) & (e) \prod_{k=1}^n 2k & (g) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ (b) \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} & (d) \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) & (f) \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} & (h) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \end{array}$$

Exercice 10

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression $\frac{k}{k!}$. Le résultat obtenu est-il valable pour $k = 0$?

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $\frac{k!}{(k+1)!}$.

(c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k \times k! = (k+1)! - k!$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P = \prod_{k=1}^n (2k)$ et $Q = \prod_{k=0}^n (2k+1)$.

Déterminer la valeur de P , puis celle de $P \times Q$ et en déduire la valeur de Q .

Exercice 12 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$.

Exercice 13 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, on a :

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{lll} (a) S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j). & (b) T_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j). & (c) U_n = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \max(i, j). \end{array}$$

Pour continuer

Exercice 15 Déterminer explicitement les valeurs des sommes suivantes en fonction de n :

$$\begin{array}{llll}
 (a) \sum_{k=0}^n 2 & (c) \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} & (e) \sum_{k=1}^n (3k-1) & (g) \sum_{k=0}^n 2^{k+1} - 2^k \\
 (b) \sum_{k=1}^n (k(k-1)+1) & (d) \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}} & (f) \sum_{k=1}^n k(k+1) & (h) \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)
 \end{array}$$

Exercice 16 Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$, $\frac{1}{k(k^2-4)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-2} + \frac{c}{k+2}$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, la valeur de $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k^2-4)}$.

Exercice 17 Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 (a) \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} & (d) \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 (b) \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1 & (e) \forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n 2k = 2^n n! \\
 (c) \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1
 \end{array}$$

Exercice 18 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 19 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k x + b_k)^2$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est un trinôme du second degré et écrire sa forme développée.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k^2 \right)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 20 *Un exercice important pour le cours de probabilités.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

(a) Exprimer $S_n(x)$ en fonction de x et n .

(b) Dans la suite, on fixe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 1$. Montrer que la fonction S_n est dérivable en x , et calculer $S'_n(x)$ de deux façons différentes.

(c) Montrer que S'_n est dérivable en x , et calculer $S''_n(x)$ de deux façons différentes.

(d) Déduire des questions précédentes les valeurs des sommes $\sum_{k=0}^n kx^{k-1}$ et $\sum_{k=0}^n k(k-1)x^{k-2}$. Que valent ces sommes lorsque $x = 1$?

(e) Calculer, pour tout réel x , $\sum_{k=0}^n k^2 x^k$.