TD de mathématiques n°4 : Généralités sur les suites réelles

Pour commencer

Généralités sur les suites

Exercice 1

(a) On considère la suite u donnée par $u_0 = \dfrac{1+e}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (e-1)\ln(u_n) + 1$. Montrer que u_n existe et $u_n \in [1, e]$ pour tout entier naturel n.

(b) On considère la suite u donnée par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. Montrer que u_n existe pour tout entier naturel n.

Exercice 2 Vrai ou faux ?

(a) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ est majoré par 2.

(b) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n + n + 1$ est minorée.

(c) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n + 1$ est majoré.

(d) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{4^n}$ est bornée.

(e) Toute suite est nécessairement soit minorée, soit majorée.

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{2n}{n+1}$ et $v_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = n - \frac{1}{n}$ et $v_n = n + \frac{1}{n}$.

Étudier les sens de variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6 Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général u_n est donné en fonction de n.

(a) $u_n = \frac{2n}{n+1}$

(b) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

(c) $u_n = \frac{2^n}{n+1}$

(d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(e) $u_n = 2n + (-1)^n$

(f) $u_n = e^{n+1} - e^n$

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$, on pose $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est décroissante.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4, n^2 \leq 2^n$.

Exercice 8 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un terme initial $u_0 \geq 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

(b) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq 2$.

(b) En déduire le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 10 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+(u_n)^2}{2}$. Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq n$ et en déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{2}$.

(d) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13 Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(x) \in \mathcal{D}_f$. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathcal{D}_f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in \mathcal{D}_f$.

Exercice 14 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + (u_n)^2}{2}}$.

(a) Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [0, 1]$.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 1]$.

(ii) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [1, +\infty[$.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in [1, +\infty[$.

(ii) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suites remarquables

Exercice 15 Vrai ou faux ?

(a) La somme de deux suites arithmétiques est arithmétique.

(b) Le produit de deux suites arithmétiques est arithmétique.

(c) La somme de deux suites géométriques est géométrique.

(d) Le produit de deux suites géométriques est géométrique.

Exercice 16 Dans chacun des cas suivants, déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$

(b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n$

(c) $u_2 = \dfrac{7}{4}$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{3}{4}$

(d) $u_5 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$

Exercice 17

(a) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique, géométrique, ou bien ni l'un ni l'autre?

(b) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique, géométrique, ou bien ni l'un ni l'autre?

Exercice 18 Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ lorsque :

(a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$

(b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n$

(c) $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 5$

(d) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -2u_n$

Exercice 19 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 3^n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$. Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) Déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 Considérons les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n \sqrt{u_n} \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln(u_n).$$

(a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 4$.

(b) Étudier les variations de $(u_n)_n$.

(c) Justifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

(d) Déterminer le terme général de $(v_n)_n$ puis celui de $(u_n)_n$.

Exercice 21 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 1$.

(a) Montrer qu'il existe une unique suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + n + 1$.

(b) En déduire explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 2v_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = -u_n + 2v_n$ et $\beta_n = 2u_n + v_n$.

(a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

(b) En déduire explicitement u_n et v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 1$.

(b) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite donnant v_n en fonction de n.

(e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

Exercice 24 Dans chacun des cas suivants, déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$

(b) $u_2 = 2$ et $u_{n+1} = -2u_n + 3$

(c) $u_1 = -\frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}$

(d) $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}$

Exercice 25 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$.

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique

(b) En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 26 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = a(1 - u_n)$. Déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27 Dans chacun des cas suivants, déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

(b) $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{9}{2}$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - \frac{9}{4}u_n$

(c) $u_3 = \frac{11}{8}$ et $u_4 = \frac{7}{8}$ et $4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$

(d) $u_0 = 0$ et $u_1 = 2\sqrt{3}$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n$

Exercice 28 On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n \end{cases}$$

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

(b) En déduire une expression explicite de u_n, puis v_n, en fonction de n.

Pour continuer

Généralités sur les suites

Exercice 29 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.

(b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 30 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_n)^2}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 0$.

(b) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 31 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 \geq -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{1+(u_n)^2}} - 1$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1$.

(b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 32 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \frac{n}{2^n}$.

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle monotone?

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle majorée?

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle minorée?

Exercice 33 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

Montrer en raisonnant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n = \dfrac{1}{n + \dfrac{1}{u_0}}$.

Exercice 34 On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait les relations $u_{n+1} = (u_n)^2 + 3u_n + 1$ et $v_{n+1} = (v_n)^2 - v_n + 1$.

Déterminer le sens de variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 35 On considère la suite réelle définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 36 *(+)* On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 0$.

(b) Déterminer les racines du polynôme $P_n(X) = X^2 - X - n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer en raisonnant par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On pourra s'aider d'une comparaison de u_n aux racines de P_n, à démontrer.

Suites remarquables

Exercice 37 Dans chacun des cas suivants, déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout entier n convenable :

(a) $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 5$

(b) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -2u_n$

(c) $u_5 = 12$ et $u_{n+1} = u_n + 1$

(d) $u_3 = -1$ et $u_{n+1} = -\dfrac{3u_n}{4}$

(e) $u_0 = 2$ et $3u_{n+1} = 2u_n - 1$

(f) $u_2 = 1$ et $5u_{n+1} = -u_n + 3$

(g) $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$

(h) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -4u_n + 5$

(i) $u_1 = 6$ et $u_2 = -6$ et $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$

(j) $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$

(k) $u_0 = 5$ et $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$

(l) $u_0 = 6$ et $u_1 = 5$ et $6u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$

Exercice 38 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

(a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $\dfrac{3x+1}{2x+4} = a + \dfrac{b}{2x+4}$.

(b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $-1 < u_n < \dfrac{1}{2}$.

(c) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

(ii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite donnant v_n en fonction de n.

(iii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

Exercice 39 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{3 - 2u_n}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = nu_n$.

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

(b) En déduire une formule explicite pour v_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 40 Soit $p \in]0,1[$. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0, u_1 = p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + (1-p)u_n$$

Déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.