Lycée Hoche
ECG1A

2025-2026
Mathématiques

Devoir surveillé numéro 1

*Devoir du **4 octobre 2025**.*

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Ce sujet comporte 6 exercices.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Cours ou proche du cours*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la proposition $P(x)$: $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, x < \dfrac{1}{n}\right) \implies x \leq 0$.
   - (a) Donner (sans justification) la négation de $P(x)$.
   - (b) Donner (sans justification) la contraposée de $P(x)$.
   - (c) Donner (sans justification) la réciproque de $P(x)$.
   - (d) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Montrer l'équivalence suivante :
$$(\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A) \iff (\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A)\,.$$
3. Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$. On rappelle que $\min(x,y)$ désigne le plus petit réel entre x et y.
4. On pose $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x+3y=1\}$ et $B = \{(t+1, -\dfrac{1+2t}{3}) | t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.
5. Écrire sous la forme d'un énoncé quantifié les propositions suivantes :
   - (a) Tout réel positif admet (au moins) un antécédent par la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$.
   - (b) Tout réel positif inférieur à son carré est nul ou supérieur à 1.
6. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et I une partie de D. Définir :
   - (a) La fonction f est strictement décroissante sur I.
   - (b) La fonction f admet un minimum sur I.
7. Sans justification, tracer l'allure des graphes des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$. *Consigne pour toute l'année : pour les graphes, indiquez systématiquement l'origine et les unités des deux axes.*
8. Montrer que si f et g sont deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$, alors $f+g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{2}$. Montrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{3}.$$
10. Écrire un code python permettant de calculer et d'afficher le résultat du calcul suivant :
$$(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{3}+2)(\frac{1}{4}+3)...(\frac{1}{99}+98).$$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Résoudre l'équation (E) : $x^2 - \frac{1}{2}x = 2x + 4$.
2. Résoudre l'inéquation (I) : $\frac{x+1}{2x-1} < 2x + 1$ (d'inconnue réelle x).
3. Résoudre l'équation $|x^2 - 1| = 2x$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation (E_a) : $\frac{x}{1+2x^2} = a$, d'inconnue réelle x.
5. Pour quels réels k existe-t-il un réel x tel que $(x^2 - 2x)(x^2 + 2x) = k$? Lorsque k convient, donner un tel réel x.
6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ *Étude de la fonction tangente hyperbolique.*

Aucun argument n'utilisant les limites n'est autorisé pour cet exercice. Des limites vous sont données uniquement pour vous permettre d'avoir un tracé de graphe assez fidèle.

On note th la fonction donnée par la formule $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. Justifier que la fonction th est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de th.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de th, et montrer que :
$$\forall x \in \mathcal{D}', \mathrm{th}'(x) = 1 - (\mathrm{th}(x))^2 = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}.$$
4. Donner le tableau de variation de th. *On admet que la limite de* th *en* $+\infty$ *vaut* 1*, quel celle en* $-\infty$ *vaut* -1.
5. Donner l'équation de la tangente à la courbe de th en 0, puis tracer l'allure du graphe de th. On tracera sa tangente en 0 sur le même graphique.
6. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \mathrm{th}(x) < 1$. *L'utilisation des limites n'est pas autorisée pour cette question.*
7. th admet-elle un maximum ?
8. Déterminer l'ensemble image $\mathrm{th}([0, \ln(2)])$.
9. (*a*) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathrm{th}(x) < x$.

   (*b*) En déduire que, pour tout réel x, $|\mathrm{th}(x)| \leq |x|$ et : $|\mathrm{th}(x)| = |x| \iff x = 0$.
10. Soit m un réel. Notons (E_m) l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : \mathrm{th}(x) = m$.

    (*a*) On suppose $m \notin]-1, 1[$ dans cette sous-question. Résoudre (E_m).

    (*b*) Simplifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression $\frac{1 + \mathrm{th}(x)}{1 - \mathrm{th}(x)}$.

    (*c*) On suppose $m \in]-1, 1[$. Montrer que (E_m) admet une unique solution, dont on donnera une expression.

11. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \left(\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}\right)^n = \frac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}.$$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Dans cet exercice, on étudie la propriété dite *de densité* de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.

Partie I : Conséquences d'une propriété P admise

Dans cette partie, on admet que la propriété P suivante est vraie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists r \in \mathbb{Q}, x < r \leq x + \frac{1}{n}.$$

1. (a) Montrer que $\sqrt{2} < \sqrt{3} - \dfrac{1}{4}$.

   (b) En déduire l'existence d'un nombre rationnel r tel que $\sqrt{2} < r < \sqrt{3}$.

2. (a) Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 + \dfrac{1}{n} < \sqrt{5}$.

   (b) En déduire l'existence d'un nombre rationnel r tel que $2 < r < \sqrt{5}$.

3. Montrer que $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \implies \exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y).$$

4. Soit a un réel. Montrer l'équivalence :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, a < x\right) \iff \left(\forall r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*, a < r\right).$$

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On suppose que f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = x.$$

   On souhaite montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$. On fixe un réel x dans ces sous-questions.

   (a) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde et de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $f(x) \leq x$.

   (b) Compléter la démonstration de l'égalité $f(x) = x$.

Partie II : Démonstration de la propriété P

Le but de cette partie est de démontrer la propriété P admise en partie I. Les résultats de la partie I ne pourront donc pas être utilisés dans les questions suivantes.

On rappelle que, pour tout réel x, la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

6. On note Q la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists r \in \mathbb{Q}, x - \frac{1}{n} < r \leq x.$$

   Montrer que pour démontrer P, il suffit de démontrer Q.

7. Démontrer la propriété Q, à l'aide de la partie entière. Tout résultat partiel pertinent sera pris en compte.

Exercice 5

Partie I : Étude d'une première fonction h

On considère la fonction $h : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + x + \ln(x) + x\ln(x) \end{array} \right.$.

1. Justifier que h est bien définie.
2. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et montrer que : $\forall x > 0, h'(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x) + 2$.
3. Justifier que h' est dérivable, et calculer la dérivée h'' de h'.
4. En déduire le tableau de variations de h'. *Les limites ne sont pas demandées.*
5. Justifier précisément que h' admet un minimum, et déterminer la valeur de celui-ci.
6. En déduire le tableau de variations de h. *Limites admises :* $h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$ *et* $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
7. Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif, noté α dans la suite de cet exercice, tel que $h(\alpha) = 0$.
8. Calculer $h(1)$ et en déduire que $\alpha \in]0, 1[$.

Partie II : Étude d'une seconde fonction g

On considère la fonction g donnée par $g(x) = (1 - x - x\ln(x))\, e^x - 1$.

9. Montrer que g a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$.
10. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et montrer que :
$$\forall x > 0, g'(x) = -h(x)e^x.$$
11. On admet que $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$. Déterminer le tableau de variations de g.
12. Justifier qu'un existe un unique réel strictement positif, noté β dans la suite, tel que $g(\beta) = 0$. Montrer aussi que $\alpha < \beta$. *On pourra admettre un fait sur le signe de $g(\alpha)$, en l'expliquant brièvement.*
13. Montrer que $\beta < 1$.
14. Montrer que $\dfrac{1 + \ln(\beta)}{e^\beta - 1} = \dfrac{1}{\beta e^\beta}$.

Exercice 6 *Généralisation d'une inégalité classique.*

On rappelle que pour tout entier naturel n, $n!$ est défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \text{ si } n \geq 1 \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$.

— *Fin de l'énoncé* —