Corrigé du DS n°1

*DS du 4 **octobre**.*

Exercice 1

1. (*a*) (*b*) et (*c*) : Voir cours.

   (*d*) Montrons : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons $P(x)$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*, x < \frac{1}{n}) \implies x \leq 0$.

   Par contraposition, supposons $x > 0$ et montrons : $\exists n \in \mathbb{N}^*, x \geq \frac{1}{n}$.

   Soit n un entier naturel supérieur à $\frac{1}{x}$. Un tel entier existe, car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré (par exemple, $n = \lfloor 1/x \rfloor + 1$ convient).

   Alors, $n \geq 1/x > 0$ car $x > 0$, donc $n \in \mathbb{N}^*$.

   Par décroissante de $t \mapsto 1/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{n} \leq x$.

   Ceci montre bien : $\exists n \in \mathbb{N}^*, x \geq \frac{1}{n}$.

   Finalement, $\boxed{P(x) \text{ est vraie, et ce pour tout } x \in \mathbb{R}.}$

2. Montrons par double implication que :

$$(\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A) \iff (\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A)\,.$$

   - Montrons $(\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A) \implies (\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A)\,.$

     Supposons : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A$, montrons :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A.$$

     Par hypothèse, on dispose de $A \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A$.

     En particulier, $-A \leq f(0) \leq A$.

     Donc $-A \leq A$, donc $0 \leq 2A$, et donc $(2 > 0)$: $0 \leq A$.

     Ceci montre que $A \in \mathbb{R}_+$, et on avait : $\forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A$.

     Donc : $\exists A \in \mathbb{R}_+, -A \leq f(x) \leq A$, d'où la première implication.

   - Montrons $(\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A) \Leftarrow (\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A)\,.$

     Cette implication est claire, car $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$: si on dispose de $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A$, alors en particulier $A \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A$, donc :

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, -A \leq f(x) \leq A.$$

   $\boxed{\text{On a bien montré l'équivalence voulue, par double implication.}}$

3. Voir cours (disjonction des cas).

4. Voir cours, TD et document relatif à la première séance de soutien sur cahier de prépa.

5. (*a*) La proposition s'écrit : $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, \ln(1 + x^2) = y.}$

   (*b*) La proposition s'écrit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq x^2 \implies x = 0 \text{ ou } x \geq 1.}$

6. Voir cours. Les réponses doivent être des restitutions de définition complètes, par exemple : «On dit que f est strictement décroissante sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) > f(y)$.» ($f$ et I sont introduits par l'énoncé).

7. Voir cours.
8. Voir cours.
9. Voir cours pour la rédaction des récurrences, et s'entrainer au calcul avec les fractions et les puissances si celui-ci vous a bloqué.
10.
```python
P=1
for i in range(1,99):
    P=P*(i+1/(i+1))
print(P)
```

Exercice 2

1. (E) est une équation polynomiale donc est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - \frac{1}{2}x = 2x + 4 \iff x^2 - \frac{5}{2}x - 4 = 0.$$

Le polynôme $X^2 - \frac{5}{2}X - 4$ est du second degré, il admet pour discriminant $\Delta = \frac{25}{4} + 16 = \frac{89}{4} > 0$.

Donc (E) admet exactement deux solutions :

$$\frac{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{89}{4}}}{2} = \frac{5 - \sqrt{89}}{4} \text{ et } \frac{5 + \sqrt{89}}{4}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les expressions $x+1, 2x-1$ et $2x+1$ sont définies en tant qu'expressions affines de x. De plus, $2x - 1 = 0 \iff x = 1/2$.

Par quotient, l'inégalité $\frac{x+1}{2x-1} < 2x + 1$ est correctement définie si et seulement $x \neq 1/2$.

Donc le domaine de définition de (I) est $D = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

Passons à la résolution de (I).

Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{2x-1} < 2x+1 &\iff \frac{x+1}{2x-1} - (2x+1) < 0 \\
&\iff \frac{x+1-(2x+1)(2x-1)}{2x-1} < 0 \\
&\iff \frac{-4x^2+x+2}{2x-1} < 0
\end{aligned}$$

Le trinôme $-4X^2 + X + 2$ a pour discriminant $1 + 32 = 33 > 0$, il admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{33}}{-8} = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{8}.$$

De plus, $x_2 < 0 < 1/2$ (car $\sqrt{33} > 1$) et $x_1 > 1/2 = 4/8$ car $\sqrt{33} > 3$ (car $33 > 9$).

Son coefficient dominant étant strictement négatif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{33}}{8}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{33}}{8}$		$+\infty$
$-4x^2+x+2$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$	||	$+$		$+$	
$\frac{-4x^2+x+2}{2x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I) \text{ est }]\frac{1-\sqrt{33}}{8},\frac{1}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{33}}{8},+\infty[.}$

3. Notons (F) l'équation $|x^2-1| = 2x$.

   (F) a pour domaine de définition $\mathbb{R}$ (les polynômes et la fonction valeur absolue étant définis sur $\mathbb{R}$).

   (F) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_-^*$ car : $\forall x < 0, \begin{cases} |x^2-1| \geq 0 \\ 2x < 0 \end{cases}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} |x^2-1| = 2x &\iff x^2-1 = 2x \text{ ou } x^2-1 = -2x \\ &\iff x^2-2x-1 = 0 \text{ ou } x^2+2x-1 = 0 \\ &\iff (x-1)^2-2 = 0 \text{ ou } (x+1)^2-2 = 0 \\ &\iff (x-1)^2 = 2 \text{ ou } (x+1)^2 = 2 \\ &\iff x-1 = \sqrt{2} \text{ ou } x-1 = -\sqrt{2} \text{ ou } x+1 = \sqrt{2} \text{ ou } x+1 = -\sqrt{2} \\ &\iff x = 1+\sqrt{2} \text{ ou } x = 1-\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}-1 \text{ ou } x = -1-\sqrt{2} \end{aligned}$$

   Or, $\sqrt{2} > 1$ donc : $1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}-1$ sont positifs, tandis que $1-\sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2}$ sont strictement négatifs.

   Donc les solutions positives de (F) sont $1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}-1$.

   Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (F) \text{ est } \{1+\sqrt{2},\sqrt{2}-1\}.}$

4. Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $1+2x^2 \geq 1 > 0$.

   Donc l'expression $\frac{x}{1+2x^2}$ est définie pour tout réel x, comme quotient de réels dont le dénominateur est non nul.

   Donc l'équation (E_a) : $\frac{x}{1+2x^2} = a$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x}{1+2x^2} = a \iff x = a(1+2x^2) \iff 2ax^2-x+a = 0.$$

   Donc les solution de (E_a) sont les racines du polynôme $P_a = 2aX^2-X+a$.

   Premier cas : si $a = 0$, alors $P_a = -X$ donc l'unique racine de P_a est 0.

   Donc si $a = 0$, (E_a) admet 0 comme unique solution.

   Second cas : Sinon, $a \neq 0$.

   $2a \neq 0$, donc $P_a = 2aX^2-X+a$ est un polynôme du second degré, de discriminant :

$$\Delta_a = 1-8a^2 = 1^2-(\sqrt{8}a)^2 = (1-\sqrt{8}a)(1+\sqrt{8}a).$$

   Le signe de Δ_a en fonction de a est donc donné par le tableau suivant ($\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$):

a	$-\infty$		$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$1-\sqrt{8}a$		$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$1+\sqrt{8}a$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
Δ_a		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

   Premier sous-cas : Si $a \notin [-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}]$, alors $\Delta_a < 0$ donc P_a n'a pas de racine réelle, et (E_a) n'a pas de solution.

Second sous-cas : Si $a = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ou $a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, alors $\Delta_a = 0$ donc P_a a une unique racine et (E_a) a une unique solution : $\dfrac{1}{4a}$.

Troisième sous-cas : Si $a \in]-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, 0[\cup]0, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}[$, alors $\Delta_a > 0$, P_a a exactement deux racines et (E_a) a exactement deux solutions :

$$\frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{4a} \text{ et } \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{4a}.$$

$\boxed{\text{Conclusion :}}$

- Si $a = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ou $a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, alors (E_a) admet une unique solution : $\dfrac{1}{4a}$.
- Si $a = 0$, alors (E_a) admet une unique solution : 0.
- Si $a \in]-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, 0[\cup]0, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}[$, alors (E_a) admet exactement deux solutions : $\dfrac{1+\sqrt{1-8a^2}}{4a}$ et $\dfrac{1-\sqrt{1-8a^2}}{4a}$.
- Sinon, (E_a) n'admet aucune solution.

5. Soit k un réel. Notons (E_k) l'équation $(x^2-2x)(x^2+2x) = k$ d'inconnue réelle x. k est solution du problème posé si et seulement si (E_k) admet (au moins) une solution.

   L'équation polynomiale (E_k) est définie sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$(x^2-2x)(x^2+2x) = k \iff x^4 - 4x^2 - k = 0 \iff t^2 - 4t - k = 0,$$

   où l'on pose $t = x^2$.

   Donc : x est solution de (E_k) si et seulement si $t = x^2$ est racine du polynôme $P = X^2 - 4X - k$.

   Ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta_k = 16 + 4k = 4(4+k)$.

   On remarque : $\Delta_k \geq 0 \iff k \geq -4$.

   Premier cas : Si $k < -4$.

   Dans ce cas, P n'a pas de racines, donc x n'est pas solution de (E_k), et ce pour tout réel x.

   Conclusion partielle : si $k < -4$, alors k n'est pas solution du problème posé.

   Second cas : Sinon, $k \geq 4$.

   Dans ce cas, $\Delta_k \geq 0$ donc P admet au moins une racine. Ses racines, éventuellement égales, sont alors :

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{\Delta_k}}{2} = 2 + \sqrt{4+k} \text{ et } x_2 = 2 - \sqrt{4+k}.$$

   On remarque que $x_1 \geq 0$ (x_1 est sommes de réels positifs).

   Donc dans ce cas, si $x = \sqrt{x_1}$, alors $t = x_1$ est racine de P.

   Donc $\sqrt{x_1}$ est solution de (E_k).

   Conclusion partielle : Si $k \geq 4$, alors k est solution du problème posé.

   Conclusion :

   Les réels k solutions du problème posé sont exactement les réels supérieurs à -4, et si $k \geq -4$, alors en posant $x = \sqrt{2+\sqrt{4+k}}$, on a l'égalité :

$$(x^2-2x)(x^2+2x) = k.$$

6. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$: "$S_n = 1 - \dfrac{1}{n(n+1)}$".

   Initialisation :

$S_1 = \dfrac{1}{1\cdot 2} = 1/2$ et $1 - \dfrac{1}{1+1} = 1/2$ donc $P(1)$ est vraie, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$S_{n+1} = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Par $P(n)$:

$$S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Ceci démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

$\boxed{\text{On a bien montré, par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}.}$

Exercice 3

1. $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto e^{-x}$ également par composition avec une fonction affine. Donc les fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - e^{-x}$ et $x \mapsto e^x + e^{-x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ en tant que sommes de telles fonctions.

   De plus, pour tout réel x, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} > 0$.

   $\boxed{\text{Ainsi, la fonction th} : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ comme quotient de fonctions définies sur } \mathbb{R} \text{ dont le dénominateur ne s'annule pas.}}$

2. Le domaine de définition de th étant $\mathbb{R}$, il est bien symétrique par rapport à 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = -\frac{\mathrm{e}^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\mathrm{th}(x).$$

   Ainsi, $\boxed{\text{La fonction th est impaire.}}$

3. Posons $\begin{cases} u(x) = e^x - e^{-x} \\ v(x) = e^x + e^{-x} \end{cases}$ pour tout réel x. $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto e^{-x}$ également comme composée de telles fonctions ($x \mapsto -x$ est affine donc dérivable). Donc u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que sommes de telles fonctions.

   Ainsi, $\boxed{\text{la fonction th est dérivable sur } \mathcal{D}' = \mathbb{R}}$ comme quotient des fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur v ne s'annule pas.

   De plus, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\mathrm{th}'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}\end{aligned}$$

   ($e^x e^{-x} = e^0 = 1$). Reprenons le calcul différemment à partir de la seconde ligne:

$$\begin{aligned}\mathrm{th}'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= 1 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = 1 - (\mathrm{th}(x))^2\end{aligned}$$

   ce qui prouve l'égalité voulue : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.}$

4. Soit x un réel.

   $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} > 0$.

   Donc $\text{th}'(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ est un réel strictement positif comme quotient de réels strictement positifs.

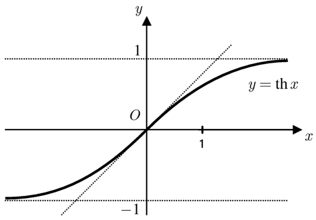
   th' étant strictement positive, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\text{th}(x)$	-1	$\nearrow$	$+1$

5. th étant dérivable en 0, sa courbe admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation donnée par :

$$y = \text{th}(0) + x\text{th}'(0)$$

   Avec $\text{th}(0) = 0$ et $\text{th}'(0) = 1 - \text{th}^2(0) = 1$, $\boxed{\text{la tangente recherchée est la droite d'équation } y = x.}$



6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $e^x + e^{-x}$ est strictement positif, donc :

$$\begin{aligned}
-1 < \text{th}(x) < 1 &\iff (e^x + e^{-x}) \times (-1) < e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \\
&\iff -e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x} \text{ et } e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \\
&\iff -e^x < e^x \text{ et } -e^{-x} < e^{-x} \\
&\iff 0 < 2e^x \text{ et } 0 < 2e^{-x} \\
&\iff 0 < e^x \text{ et } 0 < e^{-x}.
\end{aligned}$$

   Or, l'exponentielle est strictement positive, donc la dernière proposition est vraie.

   Par chaîne d'équivalence, $-1 < \text{th}(x) < 1$, d'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \text{th}(x) < 1.}$$

7. On a montré question 3 que th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Donc pour tout réel a, $\text{th}(a + 1) > \text{th}(a)$, donc th n'atteint pas de maximum en a.

   Donc $\boxed{\text{th n'a pas de maximum.}}$

   Si vous avez argumenté avec la condition nécessaire d'extremum (proposition 64 chapitre 2), il ne fallait pas oublier de dire que $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert pour appliquer convenablement ce théorème.

8. th est strictement croissante, donc croissante, sur $[0, \ln(2)]$.

   De plus, th est continue, car dérivable, sur $[0, \ln(2)]$ (car elle l'est sur $\mathbb{R}$).

   Par théorème, $\text{th}([0, \ln(2)]) = [\text{th}(0), \text{th}(\ln(2))]$.

   Or $\text{th}(0) = 0$ et $\text{th}(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} - 1/e^{\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + 1/e^{\ln(2)}} = \dfrac{3}{5}$.

   Donc $\boxed{\text{th}([0, \ln(2)]) = [0, \frac{3}{5}].}$

9. (a) Soit $g : x \mapsto \text{th}(x) - x$.

   g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme des fonctions th, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question 3, et $x \mapsto -x$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car affine.

   D'après la question 3 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \text{th}'(x) - 1 = -(\text{th}(x))^2.$$

Le carré d'un réel étant toujours positif : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) \leq 0$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = 0 \iff \operatorname{th}(x) = 0 \iff e^x - e^{-x} = 0 \iff e^x = e^{-x} \overset{(1)}{\iff} x = -x \iff x = 0.$$

((1) :par croissance stricte de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$).

Donc g' est négative sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule uniquement en 0. Par théorème, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par décroissante stricte :

$$\forall x > 0, g(x) < g(0) = 0.$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{th}(x) - x < 0$.

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{th}(x) < x.}$

(*b*) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $\operatorname{th}(0) = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$.

D'autre part, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall t > 0, \operatorname{th}(t) > \operatorname{th}(0) = 0 \text{ et } \forall t < 0, \operatorname{th}(t) < \operatorname{th}(0) = 0.$$

Si $x > 0$, on a donc $|\operatorname{th}(x)| = \operatorname{th}(x)$ et $|x| = x$.

D'après la question précédente, $\operatorname{th}(x) < x$. Donc $|\operatorname{th}(x)| < |x|$.

Si $x = 0$, alors $|\operatorname{th}(x)| = 0 = |x|$.

Si $x < 0$, alors par imparité de th :

$$|\operatorname{th}(x)| = |-\operatorname{th}(-x)| = |\operatorname{th}(-x)| = \operatorname{th}(-x)$$

car alors $-x > 0$.

Donc dans ce cas, d'après la question précédente :

$$|\operatorname{th}(x)| = \operatorname{th}(-x) < -x = |x|.$$

Finalement, dans tous les cas : $|\operatorname{th}(x)| \leq |x|$, et le cas d'égalité n'est réalisé que si $x = 0$.

On a bien montré : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{th}(x)| \leq |x| \text{ et } (|\operatorname{th}(x)| = |x| \iff x = 0).}$

10. (*a*) Supposons $m \notin]-1, 1[$. D'après la question 6 : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) \in]-1, 1[$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) \neq m$.

Donc $\boxed{\text{si } m \notin]-1,1[\text{, alors l'équation } (E_m) \text{ n'a pas de solutions.}}$

(*b*) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a déjà montré $-1 < \operatorname{th}(x) < 1$, donc $\operatorname{th}(x) \neq 1$, et on peut bien effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)} &= \frac{(1+\operatorname{th}(x))(e^x + e^{-x})}{(1-\operatorname{th}(x))(e^x + e^{-x})} \\
&= \frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}} \text{ car } \operatorname{th}(x)(e^x + e^{-x}) = e^x - e^{-x} \\
&= \frac{2e^x}{2e^{-x}} = e^{x-(-x)} = e^{2x}
\end{aligned}$$

d'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)} = e^{2x}.}$

(*c*) Soit $m \in]-1,1[$. Montrons par analyse-synthèse que l'équation (E_m), définie sur $\mathbb{R}$, admet une unique solution.

Analyse. Supposons l'existence d'une solution à l'équation (E_m) et soit x une telle solution.

Alors, $\text{th}(x) = m$ donc d'après la question précédente, $\frac{1+m}{1-m} = e^{2x}$.

On a donc $2x = \ln(\frac{1+m}{1-m})$ puis $x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+m}{1-m})$.

Conclusion de l'analyse : si (E_m) admet une solution, alors elle est unique et vaut $\frac{1}{2}\ln(\frac{1+m}{1-m})$.

Synthèse. Montrons que (E_m) admet une solution.

On a $m \in]-1,1[$, donc $0 < 1+m$ et $0 < 1-m$, donc $\frac{1+m}{1-m}$ est strictement positif comme quotient de réels strictement positifs. Posons donc

$$x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+m}{1-m})$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\text{th}(x) =& \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
=& \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} \text{ car } e^{-x} \neq 0 \\
=& \frac{e^{\ln(\frac{1+m}{1-m})} - 1}{e^{\ln(\frac{1+m}{1-m})} + 1} \\
=& \frac{\frac{1+m}{1-m} - 1}{\frac{1+m}{1-m} + 1} \\
=& \frac{1+m-(1-m)}{1+m+1-m} \\
=& \frac{2m}{2} = m.
\end{aligned}$$

Conclusion de la synthèse: $\frac{1}{2}\ln(\frac{1+m}{1-m})$ est solution de (E_m).

Conclusion : $\boxed{\text{Si } m \in]-1,1[, \text{ l'équation } \text{th}(x) = m \text{ admet pour unique solution } \frac{1}{2}\ln(\frac{1+m}{1-m}).}$

11. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question 10b) utilisée à deux reprises :

$$\left(\frac{1+\text{th}(x)}{1-\text{th}(x)}\right)^n = (e^{2x})^n = e^{2\cdot nx} = \frac{1+\text{th}(nx)}{1-\text{th}(nx)}.$$

D'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1+\text{th}(x)}{1-\text{th}(x)}\right)^n = \frac{1+\text{th}(nx)}{1-\text{th}(nx)}.}$

Exercice 4

1. (a) On raisonne par chaine d'équivalence, à l'aide de la croissance stricte de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ (tous les réels apparaissant étant positifs) :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} < \sqrt{3} - \frac{1}{4} &\iff \sqrt{2} + \frac{1}{4} < \sqrt{3} \\
&\iff (\sqrt{2} + \frac{1}{4})^2 < (\sqrt{3})^2 \\
&\iff 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{16} < 3 \\
&\iff \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{15}{16} \\
&\iff \sqrt{2} < \frac{15}{8} \\
&\iff 2 < \frac{(10+5)^2}{8^2} \quad \textit{(*)} \\
&\iff 2 \times 64 < 100 + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 25 \\
&\iff 128 < 225.
\end{aligned}$$

(*) étape ajoutée pour le calcul mental de 15^2*, vous pouvez aussi penser* $15^2 = 15(10+5) = 150+75 = 225$ *par exemple. Ou* $15^2 = (3 \times 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 10 \cdot 25 - 25 = 225$

Par chaine d'équivalence : $\boxed{\sqrt{2} < \sqrt{3} - \frac{1}{4}.}$

Variante pour la chaîne d'équivalence, avec la quantité conjuguée:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} < \sqrt{3} - \frac{1}{4} &\iff \frac{1}{4} < \sqrt{3} - \sqrt{2} \\
&\iff \frac{1}{4} < \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\
&\iff \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\
&\iff 4 > \sqrt{3} + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

(par décroissance de la fonction $t \mapsto 1/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$).

La dernière inégalité est vraie car $\sqrt{2} < 2$ et $\sqrt{3} < 2$, car $2 < 4$ et $3 < 4$.

(b) D'après la propriété P : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists r \in \mathbb{Q}, x < r \leq x + \frac{1}{n}$.

Or, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $4 \in \mathbb{N}^*$, donc on dispose d'un rationnel r tel que :

$$\sqrt{2} < r \leq \sqrt{2} + \frac{1}{4}.$$

D'après la question précédente, $\sqrt{2} + \frac{1}{4} < \sqrt{3}$.

Donc $\boxed{\text{Finalement, } r \in \mathbb{Q} \text{ et, par transitivité, } r \text{ vérifie : } \sqrt{2} < r < \sqrt{3}.}$

2. (a) Avec les mêmes arguments que pour la première question , on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
2 + \frac{1}{n} < \sqrt{5} &\iff 4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} < 5 \\
&\iff \frac{4n+1}{n^2} < 1
\end{aligned}$$

Posons $n = 5$. Alors, $\frac{4n+1}{n^2} = \frac{21}{25} < 1$ donc $2 + \frac{1}{n} < \sqrt{5}$.

$\boxed{5 \in \mathbb{N}^* \text{ et } 2 + \frac{1}{5} < \sqrt{5}.}$

(b) On pose $r = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$.

$r > 2$ car $1/5 > 0$.

On a donc $r \in \mathbb{Q}$ et d'après la question précédente:

$$2 < r < \sqrt{5}.$$

$\boxed{\text{On a bien l'existence de } r \in \mathbb{Q} \text{ tel que } 2 < r < \sqrt{5}.}$

3. Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, supposons $x < y$ et montrons : $\exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y$.

$x < y$ donc $0 < y - x$. Donc $0 < \dfrac{1}{y - x}$.

Aucun réel n'est plus grand que tous les entiers, donc on dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \dfrac{1}{y - x}$ (on peut aussi poser $n = \lfloor \frac{1}{y-x} \rfloor + 1$).

Par décroissance stricte de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{y-x}} = y - x.$$

On a donc $n \in \mathbb{N}^*$, et $x + \dfrac{1}{n} < y$.

D'après la propriété P (puisque $x \in \mathbb{R}$), on dispose de $r \in \mathbb{Q}$ tel que :

$$x < r \leq x + \frac{1}{n}.$$

Par transitivité : $x < r < y$.

Ceci monter l'existence de $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Finalement, on a bien démontré que $\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

4. L'implication $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, a < x) \implies (\forall r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*, a < r)$ est évidente car $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+^*$.

Montrons l'implication réciproque.

Supposons : $\forall r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*, a < r$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrons $a < x$.

On a $0 < x$ donc, d'après le résultat de la question 3, on dispose de $r \in \mathbb{Q}$ tel que : $0 < r < x$.

Alors, $r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*$.

Donc par hypothèse, $a < r$. Puisque $r < x$, on a bien : $a < x$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a bien démontré :$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, a < x$.

$\boxed{\text{D'où la seconde implication, puis l'équivalence voulue.}}$

5. (a) Supposons par l'absurde $f(x) > x$.

$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, on disposerait d'un rationnel r tel que :

$$x < r < f(x).$$

Mais $r \in \mathbb{Q}$, donc par hypothèse sur f : $f(r) = r$.

On a donc : $\begin{cases} x < r \\ f(r) < f(x) \end{cases}$.

Cela contredit la croissance de f sur $\mathbb{R}$.

Par l'absurde, $\boxed{\text{on a donc montré : } f(x) \leq x.}$

(*b*) Supposons par l'absurde $f(x) < x$.

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on disposerait d'un rationnel r tel que :

$$f(x) < r < x$$

.

$r = f(r)$, donc on aurait $f(x) < f(r)$ et $r < x$, ce qui contredit à nouveau la croissance de f.

Par conséquent, $f(x) \geq x$.

Finalement, $f(x) \leq x$ (par la question précédente) et $f(x) \geq x$ donc $f(x) = x$.

$\boxed{\text{On a bien montré : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x.}$

6. Montrons $Q \implies P$.

Supposons Q, montrons P.

Fixons pour cela $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrons : $\exists r \in \mathbb{Q}, x < r \leq x + \dfrac{1}{n}$.

D'après Q, on dispose de $r \in \mathbb{Q}$ tel que :

$$x - \frac{1}{n} < r \leq x.$$

Alors :

$$x < r + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n}.$$

Enfin, $r + \dfrac{1}{n}$ est rationnel comme somme de deux rationnels (affirmation en exercice pour vous).

On a donc bien trouvé un rationnel $r' = r + \dfrac{1}{n}$ tel que :

$$x < r' \leq x + \frac{1}{n}.$$

$\boxed{\text{Ceci démontre la propriété } P\text{, d'où l'implication voulue.}}$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $r = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ ($n \neq 0$ par hypothèse). r est rationnel comme quotient d'entiers .

On a $\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$ donc :

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx.$$

$n > 0$ donc :

$$\frac{nx-1}{n} = x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

On a donc bien montré l'existence de $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \dfrac{1}{n} < r \leq x$, et ce pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{Cela démontre } Q\text{, donc } P \text{ par la question précédente.}}$

Exercice 5

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   $\ln(x)$ est bien défini car $t \mapsto \ln(t)$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$. Les réels 1 et x étant bien définis, par somme et produit : $h(x) = 1 + x + \ln(x) + x\ln(x)$ est bien défini, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   Donc $\boxed{h \text{ est bien définie.}}$

2. Les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont des fonctions usuelles dérivables sur leur domaine de définition.

   Par somme et produit, $\boxed{h \text{ est dérivable sur son domaine de définition } \mathbb{R}_+^*.}$

   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$h'(x) = 0 + 1 + \frac{1}{x} + \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \ln(x) + 2.$$

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) + 2.}$

3. $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivable sur leur domaine de définition, donc h' est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de telles fonctions.

   On calcule alors :

   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h''(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}.}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   $x^2 > 0$ donc $h''(x) = \frac{x-1}{x^2}$ est du signe strict de l'expression affine $x - 1$.

   $\boxed{\text{On obtient donc le tableau de variations suivant :}}$

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h'	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$	

5. D'après la question précédente, h' est (strictement) décroissante sur $]0,1]$.

   Donc : $\forall x \in]0,1], h'(x) \geq h'(1)$.

   Par croissance de h' sur $[1,+\infty[$: $\forall x \in [1,+\infty[, h'(1) \leq h'(x)$.

   $\mathbb{R}_+^* =]0,1] \cup [1,+\infty[$ donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) \geq h'(1).$$

   Par définition, $\boxed{h' \text{ admet un minimum en 1, valant } h'(1) = 3.}$

6. D'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) \geq 3$.

   h' est donc strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ (donc elle y est positive et ne s'annule pas) par théorème $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

x	0		$+\infty$
h	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

7. On a vu que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc h est continue. De plus, d'après la question précédente, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par théorème, h est injective sur $\mathbb{R}_+^*$, et $h(\mathbb{R}_+^*) =]\lim_{x\to 0} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)[= \mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc 0 admet un antécédent par h, et celui-ci est unique par injectivité de h.

Ainsi : $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } h(\alpha) = 0.}$

8. $h(1) = 1 + 1 + \ln(1) + 1 \times \ln(1) = 3$.

   Donc $h(\alpha) = 0 < h(1)$, et $(\alpha, 1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

   Par croissance stricte de h sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x < y \iff h(x) < h(y)$.

   Donc $\alpha < 1$. De plus, $\alpha > 0$ par définition de α. On a donc bien $\boxed{\alpha \in]0, 1[}$.

9. $x \mapsto \ln(x)$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}$.

   Par produit, $x \mapsto x \ln(x)$ a pour domaine de définition $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^*$.

   Par somme et produit, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 1$ ayant pour domaine de définition $\mathbb{R}$,

   $\boxed{g \text{ a pour domaine de définition } \mathbb{R}_+^*.}$

10. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur leur domaine de définition. Ainsi, $\boxed{g \text{ est dérivable sur son domaine de définition } \mathbb{R}_+^*}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur leur domaine de définition.

    Soit $u : x \mapsto 1 - x - x\ln(x)$. $g : x \mapsto u(x)e^x - 1$ donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= u'(x)e^x + u(x)e^x - 0 \\ &= (-1 - \ln(x) - 1)e^x + (1 - x - x\ln(x))e^x \\ &= (-1 - \ln(x) - x - x\ln(x))e^x \\ &= -h(x)e^x\end{aligned}$$

    On a bien : $\boxed{\forall x > 0, g'(x) = -h(x)e^x.}$

11. h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en α. Donc h est strictement négative sur $]0, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$.

    $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = -h(x)e^x$ et l'exponentielle est à valeurs strictement positives, donc g' est du signe strict de $-h$.

    $\boxed{\text{On a donc le tableau suivant :}}$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

12. *Vous pouviez admettre que $g(\alpha > 0)$ pour cette question, en expliquant brièvement que g est strictement croissante sur $]0, \alpha[$ et de limite nulle en 0.*

    g est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, g est strictement croissante sur l'intervalle $]0, \alpha]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$.

    Par théorème :

    - $g(]0, \alpha]) =]\lim\limits_{x \to 0} g(x), g(\alpha)] =]0, g(\alpha)]$, et
    - g est injective sur $[\alpha, +\infty[$ et $g([\alpha, +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} g(x), g(\alpha)] =] - \infty, g(\alpha]$.

    En particulier, $0 \notin g(]0, \alpha])$: 0 n'a pas d'antécédent par g sur $]0, \alpha]$.

    De plus, $g(\alpha) \in g(]0, \alpha]) =]0, g(\alpha)]$ donc $0 < g(\alpha) \leq g(\alpha)$, donc $0 < g(\alpha)$.

    Donc $0 \in g([\alpha, +\infty[)] =] - \infty, g(\alpha)]$: 0 admet un antécédent par g sur $[\alpha, +\infty[$ et celui-ci est unique, par injectivité de g sur cet intervalle. Notons β cet antécédent, on a donc $\beta \geq \alpha$.

On a aussi $\beta \neq \alpha$ car $\begin{cases} g(\alpha) > 0 \\ g(\beta) = 0 \end{cases}$.

Donc $\beta > \alpha$.

Finalement, $\boxed{\beta \text{ est l'unique antécédent de 0 par } g, \text{ et } \alpha < \beta.}$

13. On a $g(\beta) = 0$, et $g(1) = -1$.

    Donc $g(1) < g(\beta)$.

    De plus, $\alpha < 1$ par la question 8, donc avec la question précédente, β et 1 sont éléments de $[\alpha, +\infty[$, intervalle sur lequel g est strictement décroissante.

    Donc $\beta < 1 \iff g(\beta) > g(1)$.

    $\boxed{\text{Donc } \beta < 1.}$

14. Par chaîne d'équivalence ($\beta \neq 0$ donc les dénominateurs sont non nuls):

$$\begin{aligned} \frac{1+\ln(\beta)}{e^\beta - 1} = \frac{1}{\beta e^\beta} &\iff (1+\ln(\beta)\beta e^\beta = e^\beta - 1 \\ &\iff 0 = e^\beta - 1 - (\beta + \beta\ln(\beta))e^\beta \\ &\iff (1 - \beta - \beta\ln(\beta))e^\beta - 1 = 0 \end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie car $g(\beta) = 0$, donc : $\boxed{\frac{1+\ln(\beta)}{e^\beta - 1} = \frac{1}{\beta e^\beta}.}$

Exercice 6

1. Voir cours.

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!} \end{array} \right.$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est bien définie comme somme de $x \mapsto e^x$, définie sur $\mathbb{R}_+$, et d'une fonction polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g_n(x) \geq 0$.

   Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$.

   Initialisation : $P(1)$ a été démontrée dans la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x \iff e^x - 1 - x \geq 0.$$

   d'où l'initialisation.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

   g_{n+1} est dérivable sur son $\mathbb{R}_+$ en tant que somme, car $x \mapsto e^x$ est dérivable (fonction usuelle) ainsi que $x \mapsto -1 - x - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (fonction polynomiale).

   $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(x) &= e^x - 0 - 1 - \frac{2x}{2!} - \frac{3x^2}{3!} - \ldots - \frac{(n+1)x^n}{n!} \\ &= e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!} \\ &= g_n(x) \end{aligned}$$

car : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{k}{k!} = \dfrac{k}{1 \times 2 \times ... \times (k-1) \times k} = \dfrac{1}{(k-1)!}$.

Donc $g'_{n+1} = g_n$.

Par hypothèse de récurrence, g_n est positive sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Donc g_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g_{n+1}(x) \geq g_{n+1}(0) = e^0 - 1 = 0.$$

Ceci montre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

On a montré par récurrence que $g_n : x \mapsto e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2!} - ... - \dfrac{x^n}{n!}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}.}$

— *Fin du corrigé* —