

IV. Un exercice de synthèse sur le problème de Syracuse

Soit A un entier naturel. On rappelle que la *suite de Syracuse de paramètre A* est la suite u définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = A \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} .$$

On remarque que si, pour un certain n_0 , on a $u_{n_0} = 1$, alors les termes suivants de la suite $u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, \dots$ sont indéfiniment 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

La conjecture de Syracuse (1937), non résolue à ce jour (2024), prédit que quelque soit la valeur de A , la suite de Syracuse de paramètre A termine par ce cycle 4, 2, 1, ...

Exercice 21. Toutes ces questions sont bien sûr à faire en Python.

1. Écrire une fonction d'entête `def Syracuse(A, n)` prenant en entrée deux entiers naturels A et n et renvoyant en sortie la liste $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ des $n + 1$ premiers termes de la suite de Syracuse de paramètre A .
2. Représenter graphiquement les n premiers termes de la suite de Syracuse de paramètre A dans les cas suivants :

- $A = 15$ et $n = 25$,
- $A = 9$ et $n = 25$,
- $A = 27$ et $n = 100$.

On pourra chercher à automatiser ce processus.

Soit A un entier naturel et $(u_n)_n$ est la suite de Syracuse de paramètre A .

- On appelle *durée de vol* du paramètre A l'entier $d_A = \min\{n \in \mathbb{N}, u_n = 1\}$.
 - On appelle *altitude maximal de vol* du paramètre A la valeur $M_A = \max(u_0, u_1, \dots, u_{d_A})$.
3. Déterminer la durée de vol et l'altitude maximal de vol des paramètres $A = 3$ et $A = 15$.
 4. Écrire une fonction d'entête `def Vol(A)` : prenant en entrée un entier naturel A et renvoyant en sortie le couple (d_A, M_A) formé par la durée de vol et l'altitude de vol du paramètre A . Tester cette fonction pour $A \in \{3, 15, 27\}$.
 5. Déterminer un paramètre A_0 ayant une durée de vol maximale parmi les paramètres A tels que $A \leq 1000$, ainsi que son altitude de vol correspondante.
 6. Représenter les termes $u_0, u_1, \dots, u_{d_{A_0}}$ de la suite de Syracuse de paramètre A_0 .
 7. Déterminer un paramètre A_1 ayant une altitude de vol maximale parmi les paramètres A tels que $A \leq 1000$, ainsi que sa durée de vol correspondante.
 8. Représenter les termes $u_0, u_1, \dots, u_{d_{A_1}}$ de la suite de Syracuse de paramètre A_1 .
 9. Déterminer le nombre de suites de Syracuse dont la durée de vol est inférieur à 20, et lister les paramètres correspondants.
 10. Déterminer le nombre de suites de Syracuse dont l'altitude maximale est inférieur à 100, et lister les paramètres correspondants.