Lycée Hoche
ECG1A

2025-2026
Mathématiques

Devoir maison

*Le **10/10/2025**.*

À rendre le vendredi 17 octobre.

Exercice 1

Dans son DS n°1, une élève a sous-entendu le théorème suivant :

Théorème : Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle ouvert I. Alors, f n'admet pas de maximum sur I.

Malheureusement, ce résultat n'est pas dans le cours, et doit donc être démontré dans la copie pour pouvoir être utilisé légitimement en DS (ce qui fait qu'il est souvent pus économe de faire une démonstration de la conclusion recherchée dans le cas précis où on doit s'en servir).

Démontrer ce théorème.

On rappelle que la notion d'intervalle ouvert est définie dans le chapitre 1.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Faire l'étude complète de f jusqu'à son tableau de variations.
2. Déterminer le signe (strict) de $x \mapsto f(x) - x$ sur son domaine. Montrer que cette fonction s'annule en un unique point sur $\mathbb{R}_+$, noté ϕ dans la suite de cet exercice.
3. A l'aide du résultat précédent, tracer sur un même graphique les courbes de f et de $x \mapsto x$. On justifiera les positions relatives de ces deux courbes. On donne $\sqrt{5} \simeq 2,2$. *Faites un graphique assez grand.*

On considère maintenant la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Sur le graphique de la question 3, représenter les 4 premiers termes de la suite u. Que conjecturer sur cette suite (monotonie, caractère borné, limite...)?
5. Justifier que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def U(n):` prenant en entrée un entier n et renvoyant en sortie u_n.
7. Étudier la monotonie de u à l'aide de résultats sur la fonction f.
8. Montrer que u est bornée.
9. Justifier : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{2}$.
10. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \phi| \leq \dfrac{|u_0 - \phi|}{2^n}$. Avec vos connaissances du lycée, qu'en déduire sur la limite de (u_n) ?

Exercice 3

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq f(y)$. Que dire de f ?
2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On suppose A et B non vides, et on suppose :

$$\forall x \in A, \forall y \in B, x = y.$$

Que dire de A et B?

Remarque. Toute proposition de la forme «$\forall x \in \emptyset, P(x)$» est vraie, donc cette condition ne dit rien si A ou B est vide.

— fin —