

TD de mathématiques n°5 : Polynômes

Pour commencer

Second degré

Exercice 1 Mettre sous forme canonique les trinômes suivants, puis dresser leurs tableaux de variations :

(a) $x \mapsto x^2 - 2x + 3$ (b) $x \mapsto x^2 - 4$ (c) $x \mapsto -3x^2 + 6x + 8$ (d) $x \mapsto 2(x - 2)(4 - x)$

Exercice 2 Déterminer les racines et les tableaux de signe de chacun des trinômes suivants :

(a) $x \mapsto x^2 - 4$ (b) $x \mapsto -x^2 + 5x - 6$ (c) $x \mapsto x^2 + x - 1$ (d) $x \mapsto (3 - 2x)(x - 5)$

Exercice 3 Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(a) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ (d) $x^4 - 4x^2 + 3 \leq 0$ (g) $x^4 - x^2 - 2 > 0$ (j) $e^x - e^{-x} = 2$
(b) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ (e) $x^4 - x^2 - 2 = 0$ (h) $e^x + e^{-x} \leq 4$ (k) $3x^4 + 5x^2 - 2 \geq 0$
(c) $x^4 + 2x^2 - 3 \leq 0$ (f) $e^x + e^{-x} = 4$ (i) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ (l) $e^x - e^{-x} > 2$

Identification des coefficients

Exercice 4 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

(a) $a(X + 1) + b(X - 1) + c(X^2 - 1) = X^2$.
(b) $a(X^2 + X) + b(X^2 - X) + c(X^2 + 1) = 2(X^2 - 1)$

Exercice 5 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

(a) $\frac{1}{X^2+X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$. (c) $\frac{4X-2}{X(X^2-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$.
(b) $\frac{1}{X^2-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$. (d) $\frac{2}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$

Exercice 6 En utilisant les résultats de l'exercice précédent, calculer les valeurs des sommes :

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ (c) $\sum_{k=2}^n \frac{4k-2}{k(k^2-1)}$
(b) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1}$ (d) $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 7 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(1) = P(-1) = 1$ et $P'(1) = 0$ et $P'(-1) = -4$.

Exercice 8 Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P'(X) - XP(X) = X^2 - 1$.

Exercice 9

- (a) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = XP'(X)$.
(b) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $2P(X) = XP'(X)$.
(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $nP(X) = XP'(X)$.

Division euclidienne

Exercice 10 Réaliser la division euclidienne de :

- (a) $3X^3 - X^2 + X + 1$ par $X - 1$
- (b) $X^4 - 5X^3 + 4X^2 - 2X + 1$ par $X^2 - 4X - 3$
- (c) $X^4 + X^3 + 2X + 1$ par $X^2 - 1$
- (d) $X^3 - 2X + 1$ par $X - 1$
- (e) $2X^5 - X^3$ par $X^3 + 1$
- (f) $X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4$ par $X^2 - 3X + 2$
- (g) $X^3 + 3X - 4$ par $X - 1$
- (h) $X^4 + 1$ par $X^2 - \sqrt{2}X + 1$
- (i) $2X^3 + 7X^2 - 2X - 3$ par $2X^2 - X + 1$
- (j) $X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 2X + 1$ par $X^2 - 1$

Exercice 11 On pose $P(X) = X^2$.

- (a) Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $X + 1$.
- (b) En déduire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

Exercice 12 Pour quelle(s) valeur(s) $a, b \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^2 - 3X + 2$ divise-t-il le polynôme $aX^3 + bX + 1$?

Racines et factorisation

Exercice 13 Factoriser le plus possible le polynôme $P(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 + X + 1$. Puis, Résoudre l'équation $P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 Factoriser le plus possible les polynômes :

- (a) $X^3 - 2X^2 + 2X - 1$
- (b) $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$
- (c) $X^3 - 4X^2 - 7X + 10$
- (d) $2X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 7X - 3$

Exercice 15 Soit $b \in \mathbb{R}$ et $P(X) = X^3 - b^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

- (a) Déterminer une racine évidente de P , puis factoriser P le plus possible.
- (b) En déduire l'identité remarquable: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
- (c) En déduire l'identité remarquable : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
- (d) Factoriser le plus possible le polynôme $Q(X) = X^6 - 1$.

Exercice 16 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^2 - 3X + 2$ divise le polynôme $(X - 2)^{2n} + (X - 1)^n - 1$.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer toutes les éventuelles racines du polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} X^k$.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que $\sum_{k=0}^n |P(k) - Q(k)| = 0$. Montrer que $P = Q$.

Exercice 19

- (a) Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas une fonction polynomiale.
- (b) Montrer que la fonction exponentielle n'est pas une fonction polynomiale.
- (c) Montrer que la fonction partie entière n'est pas une fonction polynomiale.

Exercice 20 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x + 1) = P(x)$.

Exercice 21 *Utile pour la suite* Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons $P(X) = X^2 - 3X + 2$. Notons R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.

- (a) Montrer que P admet deux racines distinctes α et β .
- (b) Déterminer $R_n(\alpha)$ et $R_n(\beta)$.
- (c) En déduire une expression de $R_n(X)$.

Pour continuer

Exercice 22 Déterminer toutes les valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + b$.

Exercice 23 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

(a) $aX(X-1) + bX(X+1) + c = X + 1$

(b) $aX(X-1)(X-2) + bX(X+1)(X+2) + c(X^2-1) = 4X^2 + 2$

(c) $aX(1-X)(1+X) + b(1-X)(1+X) + cX = 2X^3 + X^2 + X - 1$

Exercice 24 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

(a) $\frac{2X^2-4X+5}{(X+4)^3} = \frac{a}{(X+4)^3} + \frac{b}{(X+4)^2} + \frac{c}{X+4}$.

(b) $\frac{X^2+1}{X-2} = aX + b + \frac{c}{X-2}$.

Exercice 25 Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 1$ et $P'(1) = 1$.

Exercice 26 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $4P(X) = XP'(X) + P''(X)$.

Exercice 27 Factoriser le plus possible le polynôme $P(X) = -X^3 - 3X^2 + 6X + 8$. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 28 Factoriser le plus possible les polynômes :

(a) $X^3 - X^2 - 3X + 3$

(c) $X^3 - X^2 - 3X - 1$

(b) $X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4$

(d) $X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 8$

Exercice 29 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 - a^2X + 2X + a^2$.

(a) Factoriser le polynôme P le plus possible.

(b) Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 30 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que $\sum_{k=0}^n (P(k))^2 = 0$. Montrer que $P = 0$.