

Corrigé du DM n°1

A rendre le 17 octobre.

Exercice 1

Soit I un intervalle ouvert, et f une fonction croissante sur I . Montrons que f n'admet pas de maximum sur I .

I étant un intervalle ouvert, on dispose de a et b réels, ou éventuellement $a = +\infty$ ou $b = -\infty$, tels que :

$$I =]a, b[.$$

Soit $x_0 \in I$, montrons que f n'admet pas de maximum en x_0 sur I .

Premier cas : si $b = +\infty$.

Posons $x = x_0 + 1$.

On a $a < x_0 < x_0 + 1$ donc $a < x_0 + 1$ donc $x = x_0 + 1 \in I =]a, +\infty[$ (avec la convention usuelle si $a = -\infty$).

On a donc $(x_0, x) \in I^2$ et $x_0 < x$. Par croissance stricte de f sur I :

$$f(x_0) < f(x).$$

$x \in I$, donc ceci montre que f n'admet pas de maximum en x_0 sur I .

Second cas : Sinon, $b \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, posons $x = \frac{x_0 + b}{2}$. (*Idée : x est supérieur à x_0 et appartient à I , c'est le milieu du segment $[x_0, b]$ - faire un dessin*).

On a $x_0 < b$ donc : $2x_0 < x_0 + b$ et $x_0 + b < 2b$.

Donc $(2 > 0) : x_0 < x < b$.

Puisque $a < x_0$, on a par transitivité :

$$a < x < b.$$

Donc $(x_0, x) \in I^2$, et $x_0 < x$. Par croissance stricte de f sur I :

$$f(x_0) < f(x).$$

Donc f n'admet pas de maximum en x_0 sur I .

Conclusion : Dans tous les cas, f n'admet pas de maximum en x_0 sur I .

Ceci est donc vrai pour tout $x_0 \in I$: f n'admet pas de maximum sur I , d'où le théorème.

Exercice 2

1. $x \mapsto 1 + x$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+$ et est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition, $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ a pour domaine de définition $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1+x \in \mathbb{R}_+\}$ et est dérivable sur $D' = \{x \in \mathbb{R}, 1+x \in \mathbb{R}_+^*\}$. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x \geq 0 \iff x \geq -1) \text{ et } (1+x > 0 \iff x > -1).$$

Donc f a pour domaine de définition $D = [-1, +\infty[$ et est dérivable sur $D' =]-1, +\infty[$.

Par composition :

$$\forall x \in D', f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$$

(car pour tout $x > -1$, $x+1 > 0$ donc $\sqrt{x+1} > 0$.)

f' étant strictement positive, f est croissante sur D' (faire un tableau de variations pour répondre à la question).

2. Par somme, $x \mapsto f(x) - x$ a pour domaine de définition $D \cap \mathbb{R} = D$.

Soit $x \in D$.

Si $x \in [-1, 0]$, $x < 0 \leq f(x)$ (positivité de la racine carrée) donc $f(x) - x > 0$.

Sinon, $x \geq 0$ et $f(x) \geq 0$ donc par croissance stricte de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$f(x) - x > 0 \iff \sqrt{x+1} > x \iff x+1 > x^2 \iff x^2 - x - 1 < 0.$$

(et la même chaîne d'équivalence est vraie avec des égalités).

$X^2 - X - 1$ est un polynôme du second degré, de discriminant $5 > 0$ donc admet pour racines $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Son coefficient dominant étant $1 > 0$, ce polynôme est strictement négatif entre ses racines, nul en ses racines et strictement positif à l'extérieur de ses racines.

Enfin, $\sqrt{5} > 1$ donc $r_1 < 0 < r_2$.

On a donc le tableau de signe suivant (complété avec l'étude du cas $x \in [-1, 0]$) :

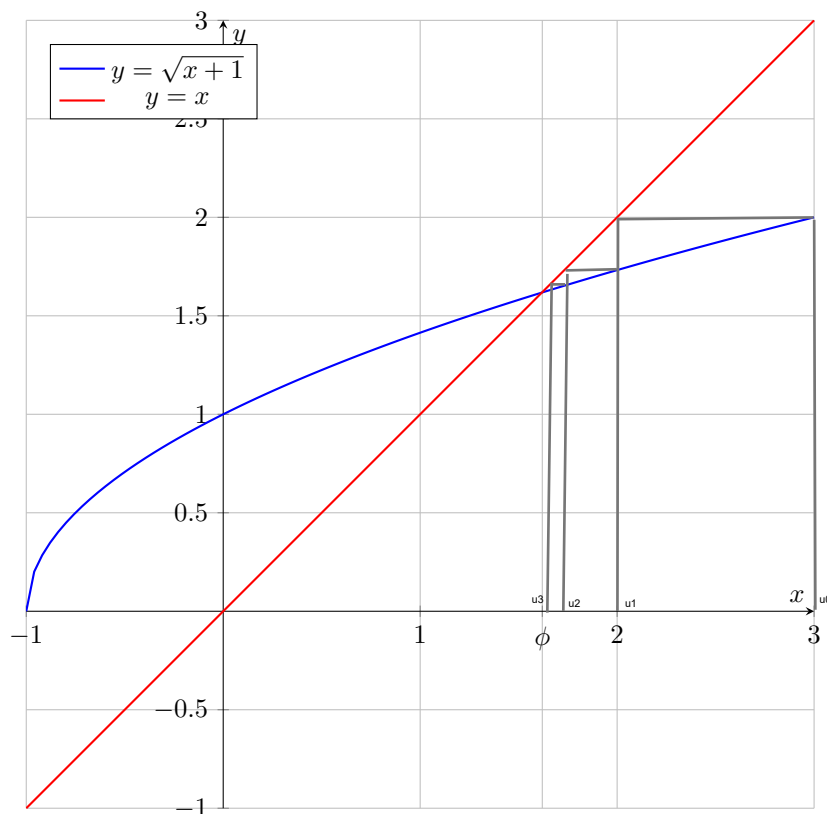
x	-1	r_2	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-

En particulier, en posant $\phi = r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$:

ϕ est l'unique point d'annulation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. $\forall x \in D, f(x) \geq x \iff f(x) - x \geq 0$.

Donc d'après la question précédente, la courbe de f est en dessous de la courbe de $x \mapsto x$ sur $[\phi, +\infty[$, au dessus sur $[-1, \phi]$ et ces courbes s'intersectent en un unique point, d'abscisse ϕ .



4. On conjecture que u est décroissante, majorée par $u_0 = 3$, minorée par ϕ et convergente vers ϕ .

A partir de maintenant, pour les questions 5 à 8, il y avait de nombreuses façon de procéder. Ce corrigé suit une méthode efficace, en montrant dès la question suivante que $u_n \geq \phi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui simplifie la suite.

5. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la proposition : " u_n existe et $u_n \geq \phi$ ".

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Initialisation : Montrons $P(0)$.

u_0 est bien défini par l'égalité $u_0 = 3$.

De plus, $\sqrt{5} < 3$ car $5 < 9$, donc $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{4}{2} = 2 < 3 = u_0$.

Donc $u_0 \geq \phi$. D'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, u_n existe et $u_n \geq \phi$.

donc $1 + u_n$ existe et $1 + u_n \geq \phi + 1$. En particulier ($\phi \geq 0$), $1 + u_n \geq 0$.

donc u_{n+1} est bien défini par l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

De plus, par croissance de la fonction racine carrée, et vu $1 + u_n \geq 1 + \phi$:

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \geq \sqrt{1 + \phi}.$$

Or, $f(\phi) - \phi = 0$ donc $\sqrt{1 + \phi} = \phi$.

On a donc : $u_{n+1} \geq \phi$.

Ceci termine la démonstration de $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq \phi$.

6.

```
import numpy as np
def f(x):
    return( np.sqrt(1+x) )

def U(n):
    u=3
    for k in range(n):
        u=f(u)
    return(u)
```

7. Ici, on pouvait aussi procéder par récurrence en montrant : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: " $u_{n+1} \geq u_n$ ". On utilise alors la croissance de f , et un autre argument pour l'initialisation.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par la question précédente, $u_n \geq \phi$.

D'après la question 2, on a donc : $f(u_n) - u_n \leq 0$.

Donc $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

8. Par décroissance de u :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 = 3.$$

De plus, par la question 4 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \phi$.

Donc u est bornée, minorée par ϕ et majorée par 3.

9. Soient x et y des réels positifs.

$$f(x) - f(y) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+y} = \frac{(1+x) - (1+y)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} = \frac{x-y}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}}$$

car $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} \neq 0$, car par positivité de x et y : $\begin{cases} \sqrt{1+x} \geq \sqrt{1} \\ \sqrt{1+y} \geq \sqrt{1} \end{cases}$, donc (1) : $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} \geq 2$.

Donc :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x-y}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \right| = \frac{|x-y|}{|\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}|}$$

De plus, par (1) : $|\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}| = \sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}$.

Donc :

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}}.$$

De plus, par (1) : $\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \leq \frac{1}{2}$.

Donc ($|x-y| \geq 0$) :

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \leq \frac{|x-y|}{2}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{2}}.$$

10. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : “|u_n - \phi| \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2^n}”$.

Initialisation : $|u_0 - \phi| = \frac{|u_0 - \phi|}{1} \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2^0}$ car $2^0 = 1$, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

D'après la question précédente ($u_n \geq 0$ et $\phi \geq 0$) :

$$|f(u_n) - f(\phi)| \leq \frac{|u_n - \phi|}{2}.$$

Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\phi) = \phi$.

Donc :

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{|u_n - \phi|}{2}.$$

Par $P(n) : |u_n - \phi| \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2^n}$. Donc ($1/2 > 0$) :

$$\frac{|u_n - \phi|}{2} \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2 \cdot 2^n} = \frac{|u_0 - \phi|}{2^{n+1}}.$$

Par transitivité :

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2^{n+1}}.$$

Ceci montre $P(n+1)$ d'où l'hérédité.

$$\boxed{\text{On a bien montré par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \phi| \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2^n}}.$$

Enfin, $2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc par inverse, $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puis par produit :

$$\frac{|u_0 - \phi|}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a donc :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - \phi| \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2^n} \\ 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \frac{|u_0 - \phi|}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}.$$

Par le théorème des gendarmes : $|u_n - \phi| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc : $u_n - \phi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par somme : $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi.}$

Exercice 3

1. Montrons que f est constante en montrant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ donc par hypothèse : $f(x) \leq f(0)$.

$(0, x) \in \mathbb{R}^2$ donc par hypothèse : $f(0) \leq f(x)$.

On a donc $f(x) \leq f(0)$ et $f(0) \leq f(x)$: ceci montre $f(x) = f(0)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est constante.

2. Montrons que A et B sont égaux et ne contiennent qu'un élément.

A étant non vide, on dispose de $a \in A$ (*fixé pour toute cette démonstration*).

- Montrons $B \subset \{a\}$.

Soit $b \in B$.

$a \in A$ et $b \in B$ donc, par hypothèse : $b = a$.

Donc $b \in \{a\}$.

Ceci étant vrai pour tout $b \in B$, on a bien montré $B \subset \{a\}$.

- Montrons $\{a\} \subset B$.

Il suffit de montrer que $a \in B$.

Or, B étant non vide, on dispose d'un élément b de B .

Alors, $a \in A$ et $b \in B$ donc par hypothèse, $a = b$.

$$\begin{cases} b \in B \\ a = b \end{cases} \quad \text{donc } a \in B, \text{ d'où } \{a\} \subset B.$$

- Par double inclusion, on a montré $B = \{a\}$.
- Montrons $A = \{a\}$. On a $a \in A$ donc $\{a\} \subset A$.
- Montrons enfin $A \subset \{a\}$.

Soit $x \in A$, montrons $x = a$ pour conclure.

$a \in B$ car on a montré $B = \{a\}$. Ainsi, $x \in A$ et $a \in B$ donc par hypothèse : $x = a$.

Ceci montre $A \subset \{a\}$, ce qui termine la démonstration.

Finalement :

$$A = B = \{a\}.$$