Programme de colle n° 4 : Sommes et produits

Semaine du lundi 9 octobre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Sommes

4.1 Sommes finies de réel : symbole $\sum$. Bornes d'une somme. L'indice de sommation est une variable muette. Intervalle entier, cardinal d'un intervalle entier.

4.2 Calcul des sommes dites constantes. Relations de linéarité de la somme. Relation de Chasles.

4.3 Calcul de $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k^2$.

4.4 Changement d'indice par décalage. Sommes télescopiques. Changement d'indice avec retournement.

4.5 Calcul des sommes géométriques.

4.6 Somme sur un ensemble, sommation de la forme $\sum_{\substack{k \in I \\ P(k)}} P(k)$ où

P est une propriété paramétrée par l'ensemble I . Sommes portant sur les termes de rangs pairs ou impairs, manipulations usuelles nous ramenant à une somme sans contrainte de parité.

Produit de réels

4.7 Symbole $\prod$ pour les produits finis de réels. Produits constants, propriétés calculatoires. Produits télescopiques, changement d'indice avec et sans retournement.

Autres propriétés sur les sommes et produits

4.8 Factorielle d'un entier. Propriétés de morphisme de l'exponentielle et du logarithme généralisées aux sommes et produits.

4.9 Sommation d'inégalités. Produit d'inégalités à membres tous positifs.

4.10 Compatibilité du produit avec la valeur absolue. Inégalité triangulaire pour les sommes finies.

4.11 Un exemple de calcul de double somme simple a été vu en cours ($\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$). Produit de deux sommes (distributivité).

Notations introduites : $\sum_{k=p}^n$, $\sum_{k \in \llbracket p, n \rrbracket}$, $\sum_{p \leq k \leq n}$.

Pas de subtilités sur les sommes portant sur un ensemble quelconque ou sur une propriété compliquée. Les élèves doivent cependant pouvoir manier les sommes portant sur les termes de rangs pairs ou impairs.

Les doubles sommes avec "contraintes liant les indices" n'ont pas encore été vues. En cas d'exercice sur une telle somme, on s'assurera que l'élève a bien compris le sens de la somme à calculer, et on guidera la première étape si besoin.

Quelques questions de cours

1. Énoncer et démontrer les propriétés de linéarité de la somme. Calculer $\sum_{k=1}^n (2k+1)$. Toute variante aussi simple autorisée.
2. Énoncer la formule donnant la somme des n premiers entiers, pour $n \in \mathbb{N}$. Énoncer et démontrer la formule donnant la somme des n premiers carrés, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Énoncer et démontrer la proposition permettant de faire un changement d'indice dit "par décalage". Calculer $\sum_{k=2}^n (k-2)$ en rédigeant un tel changement d'indice.
4. Énoncer et démontrer la proposition portant sur les sommes télescopiques. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Énoncer et démontrer la proposition permettant de faire un changement d'indice "avec retournement". Calculer $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$ en rédigeant un tel changement d'indice.
6. Énoncer et démontrer sans point de suspension le résultat portant sur les sommes géométriques.
7. Énoncer la proposition (37) portant sur les sommes sur les rangs pairs ou impairs. Expliquer deux de ces égalités avec des points de suspension.
8. Énoncer la généralisation pour les sommes finies des propriétés dites "de morphisme" de l'exponentielle et du logarithme. En démontrer une des deux par récurrence.
9. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$.