

Programme de colle n° 6 : Suites réelles, début des polynômes, révision.

Semaine du lundi 3 novembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Suites remarquables

6.1 Suites arithmétiques : définition, raison, formule donnant le terme général. Somme de termes (consécutifs) d'une suite arithmétique.

6.2 Suite géométrique : définition, formule donnant le terme général d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

6.3 Suites arithmético-géométrique : définition, méthode pour déterminer le terme général d'une telle suite.

6.4 Suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : définition. Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite non identiquement nulle qui est géométrique de raison q , et soient a et b des réels. Alors u vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \geq n_0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

si et seulement si q est solution de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. Équation caractéristique associée à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants). Théorème donnant le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique a un discriminant positif ou nul, exemples.

Fonctions polynomiales

6.5 Notion de fonction polynomiale (ou polynôme). Ensemble $\mathbb{R}[X]$. Polynôme nul $0_{\mathbb{R}[X]}$, monôme, égalité des polynômes.

6.6 Soit $f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ une fonction polynomiale. Alors, f est le polynôme nul si et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = 0.$$

6.7 Conséquence de la proposition précédente : théorème d'identification des coefficients, théorème d'unicité des coefficients.

6.8 Vocabulaire : coefficient de degré $k \in \mathbb{N}$ d'un polynôme, degré d'un polynôme, coefficient dominant, terme de plus haut degré, coefficient constant, termes d'un polynôme, polynômes unitaires. Racine d'un polynôme. Dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des polynômes, la fonction dérivée d'un polynôme est un polynôme. Les polynômes sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonctions affines, fonctions polynomiales du second degré

6.9 Rappels sur les fonctions affines, vocabulaire, monotonie en fonction du coefficient directeur.

6.10 Fonctions polynomiales du second degré : forme développée, forme canonique. Soit $f(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré (a, b et c sont donc des réels avec $a \neq 0$). Si $b^2 - 4ac < 0$, alors f n'admet pas de racine. Discriminant d'une fonction polynomiale du second degré. Forme factorisée d'un polynôme du second degré de discriminant positif (puis, de discriminant quelconque), racines. Relations coefficients-racines. Variation et signe d'un polynôme du second degré.

Début de l'arithmétique des polynômes

6.11 La somme, le produit de deux polynômes est un polynôme. Le produit d'un polynôme par un réel est un polynôme. Formules donnant les coefficients de la somme, du produit de deux polynômes.

6.12 Degré de la somme de deux polynômes. Degré du produit de deux polynômes. Degré du produit d'un polynôme par un réel. Degré du polynôme dérivé d'un polynôme.

Python

La démonstration du théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 a été donnée comme un exercice guidé facultatif, et n'est pas exigible.

6.13 Fin des généralités : boucles while, affectation multiples. Calculs des termes d'une suite vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2. Fonctions donnant la liste des termes d'une suite donnée par une relation de récurrence. Utilisation de boucles while pour détecter le premier rang d'une suite vérifiant une condition donnée.

6.14 Listes plus en détail : indices (positifs ou négatifs) et longueur d'une liste, modification d'une entrée d'une liste, ajout d'un élément en fin de liste, suppression d'un élément d'une liste. Fonction testant l'appartenance d'un élément à une liste. Fonction donnant le nombre d'occurrences d'un objet dans une liste, fonction donnant la liste des indices des occurrences d'un objet dans une liste.

Quelques questions de cours

Rappel : ces questions de cours seront au programme de la semaine suivante, tous les élèves sont donc concernés. Les premières questions de cours, plus rapides, devront être traitées aisément et accompagneront les suivantes.

- (Rapide) Soit x un réel. Considérons l'implication (P) suivante : $(\forall n \in \mathbb{N}^*, x \leq \frac{1}{n}) \implies x < 0$ (toute variante possible, au choix de l'interrogation). Donner la négation, la réciproque et la contraposée de (P) .
- (Rapide) Donner domaine de définition, de dérivabilité et tracer l'allure du graphe de la fonction usuelle suivante : (au choix de l'interrogation).
- (Rapide) Toute définition des chapitres 1 à 5 (partie déjà traitée pour le 5) peut être demandée en question de cours.
- (Rapide) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- (Rapide) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer l'équivalence : $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0) \iff (\forall n \geq 2, u_n = 0)$.
- On pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - y + 1 = 0\}$ et $B = \{(t+1, 4t+5) | t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = B$ (toute variante assez similaire possible).
- Déterminer le domaine de définition D de $f : x \mapsto (1+x)^x$. Étudier les variations de f sur D .
- Énoncer et démontrer le résultat portant sur les sommes télescopiques.
- Énoncer et démontrer le résultat portant sur les sommes géométriques.
- Énoncer la proposition relative au comportement de l'exponentielle et du logarithme vis à vis du symbole $\sum$ (prop. 51 du chapitre 3). Démontrer l'énoncé relatif au logarithme.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$. *Élèves : cette question est intégralement traitée dans l'annexe du chapitre 3.*
- Définir la notion de suite arithmétique. Énoncer et démontrer la formule permettant de calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- Définir la notion de suite arithmético-géométrique. Calculer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$.
- Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique non identiquement nulle de raison q . Soit a et b des réels. À quelle condition la suite u vérifie-t-elle la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$? Le démontrer.
- Énoncer le théorème (47, chap. 4) permettant de calculer, dans certains cas, le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants). Calculer le terme général de la suite u donnée par $u_0 = 2, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$.
- Énoncer la proposition (5, chap. 5) relative aux fonctions polynomiales identiquement nulles, puis le théorème d'unicité des coefficients. Démontrer la proposition 5.
- Énoncer la proposition (5, chap. 5) relative aux fonctions polynomiales identiquement nulles, le théorème d'identification des coefficients. Démontrer le théorème d'identification des coefficients.
- Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant la forme canonique d'un polynôme du second degré.
- Énoncer la proposition et définition définissant la forme factorisée d'un polynôme du second degré. Tracer l'allure des graphes possibles pour un polynôme du second degré, en fonction de sa forme canonique, de son discriminant et de son coefficient dominant.
- Énoncer les propositions donnant le degré d'une somme, d'un produit, de la dérivée d'un (de) polynôme(s). Déterminer les polynômes P tels que $P(X) - 2P'(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
- Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def U(n)` : prenant en entrée un entier n et renvoyant en sortie le n ième terme de la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n + 2^n$.
- Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée un entier naturel A et renvoyant en sortie le premier entier n pour lequel le n ième terme de la suite de Syracuse de paramètre A vaut 1. *On "admet" que ce programme devrait terminer. L'interrogation rappellera la définition de cette suite sur le sujet.*
- Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def SuiteU(n)` : prenant en entrée un entier n et renvoyant en sortie la liste $[u_0, \dots, u_n]$ des $n+1$ premiers termes de la suite u définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} \ln(1 + u_n^2)$.
- Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def ListeOccurrences(L, a)` : prenant en entrée une liste L et un objet python a et renvoyant en sortie la liste des indices des occurrences de a dans L .