Programme de colle n^o 7 : Arithmétique des polynômes. Systèmes linéaires (à finir).

*Semaine du lundi **10 novembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Arithmétique des polynômes et racines

7.1 Le théorème (admis) de la division euclidienne pour les polynômes, et son algorithme. Divisibilité entre polynômes. Pour tous polynômes A et B tels que $B \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, $B|A$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

7.2 Soit P un polynôme et r un réel, alors r est racine de P si et seulement si $X-r|P$. Utilisation pour factoriser des polynômes dont une racine est connue. Généralisations : si $a_1,...a_p$ sont des réels distincts, alors ce sont des racines de P si et seulement si $\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)|P$.

7.3 Factorisation d'un polynôme de degré n admettant n racines distinctes. Tout polynôme de degré au plus $n \in \mathbb{N}$ admettant au moins $n+1$ racines est nul. Si deux polynômes de degré au plus n coïncident en $n+1$ points, alors ils sont égaux. Si deux polynômes coïncident en une infinité de points, alors ils sont égaux.

Systèmes linéaires

7.4 Généralités sur les systèmes linéaires : notion d'équation linéaire, de coefficient, de second membre, résolution d'une équation linéaire, notion d'équation linéaire homogène. Notion de système linéaire. Notion de système linéaire compatible, incompatible. Systèmes linéaires équivalents.

7.5 Théorème admis : tout système linéaire admet 0, 1 ou une infinité de solutions. Notion de système linéaire homogène. Le n-uplet nul est solution de tout système linéaire homogène à n inconnues. Notion de système linéaire carré, sur-déterminé, sous-déterminé. Notion de système linéaire de Cramer.

7.6 Notion de système linéaire triangulaire. Coefficients diagonaux d'un système linéaire carré. Théorème admis : un système linéaire triangulaire est de Cramer si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Résolution des systèmes triangulaires de Cramer.

Ce théorème n'a pas été démontré formellement mais a été expliqué partiellement.

7.7 Notion de système linéaire échelonné. Inconnues principales, inconnues paramétriques d'un système échelonné. Notion de ligne de compatibilité. Théorème admis : un système linéaire échelonné est incompatible si et seulement s'il admet une ligne de compatibilité de la forme $0 = b$ avec $b \in \mathbb{R}^*$. Résolution de tout système échelonné.

Les élèves doivent "ranger" les systèmes linéaires donnés (seconds membres à droite des signes "=", inconnues écrites "en colonnes".

7.8 Le théorème des opérations élémentaires.

La démonstration formelle entière n'a pas été donnée, mais beaucoup d'éléments de démonstration ont été écrits.

7.9 L'algorithme du pivot de Gauss.

Sera terminé lundi.

Python : listes

7.10 Toutes les commandes usuelles sur les listes ont été vues : longueur d'une liste, i ième élément d'une liste, modification d'une entrée, ajout d'un élément en fin de liste, suppression d'une entrée, test d'appartenance, nombre d'occurrences d'un élément dans une liste, définition de sous-listes, copie indépendante de liste, concaténation, définition de listes en compréhension.

Quelques questions de cours

Les élèves devront tous effectuer une division euclidienne de polynômes pendant la colle de cette semaine et de la semaine prochaine (partie cours ou lors du premier exercice). Rappel : le programme de révision de la semaine dernière est toujours d'actualité.

1. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes, et poser la division euclidienne suivante (au choix de l'interrogation).

2. Énoncer et démontrer la proposition (44) relative au lien entre la division euclidienne de polynômes et la relation de divisibilité.
3. Énoncer et démontrer la proposition (45) liant la notion de racine d'un polynôme à la notion de divisibilité.
4. Énoncer la proposition (48) liant l'existence de racines distinctes d'un polynôme à une factorisation. L'utiliser pour factoriser complètement le polynôme $X^4 - 5X^3 + 5X^2 + 5X - 6$.
5. Énoncer et démontrer la proposition donnant la factorisation d'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines (deux à deux) distinctes.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré au plus n admettant au moins $n+1$ racines distinctes. Que dire de P? Le démontrer.
7. Définir la notion de système linéaire de Cramer. Définir la notion de système linéaire triangulaire. Énoncer la proposition relative aux systèmes triangulaires de Cramer. Résoudre le système triangulaire suivant : $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ 4z = 2 \end{cases}$ (tout variante similaire possible).
8. Énoncer la proposition caractérisant les systèmes linéaires échelonnés incompatibles. Résoudre le système échelonné suivant : (au choix de l'interrogation, n équations et p inconnues avec $n + p \leq 7$).
9. Énoncer le théorème des opérations élémentaires. Expliquer la stratégie de sa démonstration (élèves : étapes (i) à (iv) écrites en cours seulement, l'illustration des étapes (i) et (ii) sur l'opération $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ n'est pas attendue mais l'interrogation pourra tester votre compréhension!). S'en servir pour donner un système échelonné équivalent à
$$\begin{cases} & 3y+ & z & = 1 \\ x+ & y+ & & = 2 \\ 2x+ & y+ & 2z & = 3 \end{cases}$$