

TD de mathématiques n°6 : Systèmes linéaires

Systèmes linéaires

Exercice 1 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(a) \text{ (S1)} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$$

$$(c) \text{ (S3)} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$(b) \text{ (S2)} \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$$

$$(d) \text{ (S4)} \begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -6x + 3y = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(a) \text{ (S1)} \begin{cases} 4x + y + z = 2 \\ -3x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

$$(f) \text{ (S7)} \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3x + 6y + 3z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$(b) \text{ (S2)} \begin{cases} -2x - 4y + 3z = -1 \\ 2y - z = 1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$$

$$(g) \text{ (S8)} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -6x - 3y - 3z = 0 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

$$(c) \text{ (S3)} \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$(h) \text{ (S9)} \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3x + 6y + 3z = 3 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

$$(d) \text{ (S4)} \begin{cases} 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$(i) \text{ (S10)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 6y + 9z = 12 \\ -5x - 10y - 15z = -20 \end{cases}$$

$$(e) \text{ (S5)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(j) \text{ (S11)} \begin{cases} x - 2y + 5z = 13 \\ 2x + 4y - 5z = -12 \\ 3x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Exercice 3 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(a) \text{ (S1)} \begin{cases} 3x + 3y - z + 2t = -1 \\ -x + 2y - z + t = -1 \\ x + y + 2z - t = 1 \\ y - z + t = -1 \end{cases}$$

$$(c) \text{ (S3)} \begin{cases} -x + y - z - t = 2 \\ 2y - t = -1 \\ x + y - t = 1 \\ y + z + t = -3 \end{cases}$$

$$(b) \text{ (S2)} \begin{cases} -3x + y + z + t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \\ x + y + z - 3t = 0 \end{cases}$$

$$(d) \text{ (S4)} \begin{cases} -x + 3y + 2z + 2t = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(a) \text{ (S1)} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(d) \text{ (S4)} \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z - t = -1 \\ -x - y + 3z + 3t = 3 \end{cases}$$

$$(b) \text{ (S2)} \begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

$$(e) \text{ (S5)} \begin{cases} 2x - y + z - t = 0 \\ 3x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 2t = 0 \end{cases}$$

$$(c) \text{ (S3)} \begin{cases} 3x - 6y - 6z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ -2x + 4y + 6z = 0 \\ 6x - 12y - 12z = 0 \end{cases}$$

$$(f) \text{ (S6)} \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 3 \\ 2x + 4y - 3z + 3t = 2 \\ 2x + 3y + 3z - 4t = 1 \end{cases}$$

Exercice 5 Résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} x + y + 2z + 5t + u &= 3 \\ x + 5y + 2z + 9t + 3u &= 19 \\ -x + 2y - 5z + 7t - u &= 33 \\ 2x - 2y + 5z + 6t &= -12 \\ 4x + 10y + 4z + 15t + 9u &= 15 \end{cases}$$

Quelques problèmes classiques se ramenant à un système linéaire

Exercice 6

- (a) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 1$.
 (b) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$ et $P(2) = 0$.
 (c) Soient a , b et c des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = a$, $P(0) = b$ et $P'(1) = c$ et exprimer ce polynôme en fonction de a , b et c .

Exercice 7 Résoudre le système d'équation suivant, d'inconnues x , y et z appartenant à $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} x^2 y^2 = 1 \\ \frac{x^4 y^3}{z} = 2 \\ xyz = 3 \end{cases}.$$

Exercice 8 Résoudre
$$\begin{cases} x + y = 29 \\ x^2 - y^2 = 145 \end{cases}.$$

Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 9 Résoudre en fonction des valeurs de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

(a) (S1)
$$\begin{cases} 3x + 2y = a \\ 2x + y = b \end{cases}$$

(d) (S4)
$$\begin{cases} 2x + 6y = a \\ x + 3y = b \end{cases}$$

(b) (S2)
$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y - z = b \\ -3x + y + 3z = c \end{cases}$$

(e) (S5)
$$\begin{cases} 13x - 8y - 12z = a \\ 12x + 7y - 12z = b \\ 6x - 4y - 5z = c \end{cases}$$

(c) (S3)
$$\begin{cases} -2x - 3y + 3z = a \\ x + 2y - z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

(f) (S6)
$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = a \\ 2x + 3y + z - t = b \\ -4x - 5y - 9z + 11t = c \\ 7x + 10y + 7z - 8t = d \end{cases}$$

Exercice 10 Résoudre en fonction de la valeur de $m \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

(a) (S1)
$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m \end{cases}$$

(e) (S5)
$$\begin{cases} x + y + z &= m + 1 \\ mx + y + (m - 1)z &= m \\ x + my + (m + 2)z &= 1 \end{cases}$$

(b) (S2)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ mx - 6y = 1 \end{cases}$$

(f) (S6)
$$\begin{cases} mx + y = m^2 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

(c) (S3)
$$\begin{cases} (m + 1)x + 2y + 3z = 3 \\ mx + (m + 1)y + z = 1 \\ (m + 2)x + (m + 1)y + mz = m \end{cases}$$

(g) (S7)
$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = 1 \end{cases}$$

(d) (S4)
$$\begin{cases} (2 - m)x + 3y = 0 \\ 3x + (2 - m)y = 0 \end{cases}$$

(h) (S8)
$$\begin{cases} 2mx + (m - 1)y + (5 - m)z = 0 \\ (m - 1)x + 2my + (m + 7)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 11 Discuter, en fonction des paramètres $a, b, c, m \in \mathbb{R}$ les résolutions des systèmes linéaires :

$$(a) \quad (S1) \begin{cases} x + y + mz = a \\ x + my + z = b \\ mx + y + z = c \end{cases} \quad (b) \quad (S2) \begin{cases} x + y - z = a \\ x + 2y + mz = b \\ 2x + my + 2z = c \end{cases}$$

Exercice 12 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires :

$$(a) \quad (S1) \begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 2x + y = \lambda y \end{cases} \quad (c) \quad (S3) \begin{cases} 5x - 3y = \lambda x \\ 3x - y = \lambda y \end{cases}$$

$$(b) \quad (S2) \begin{cases} 5x - 6y = \lambda x \\ 4x - 5y = \lambda y \end{cases} \quad (d) \quad (S4) \begin{cases} 2x - y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases}$$

Exercice 13 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires :

$$(a) \quad (S1) \begin{cases} -4x + 6y - 3z = \lambda x \\ -x + 3y - z = \lambda y \\ 4x - 4y + 3z = \lambda z \end{cases} \quad (b) \quad (S2) \begin{cases} z = \lambda x \\ z = \lambda y \\ x + y + z = \lambda z \end{cases}$$

Exercice 14 On note (S) le système linéaire $\begin{cases} x + (1 - m)y + 2z = 2 \\ mx + (m + 1)y + z = 1 \\ 2x + (m - 1)z = m - 1 \end{cases}$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont les inconnues.

- (a) On considère le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 - 5X - 3$. Factoriser P le plus possible.
- (b) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système linéaire (S) est-il de Cramer?
- (c) Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$ le système linéaire (S) .