# Programme de colle n$^o$ 8 : Systèmes linéaires (fin). Ensembles et applications (début).

*Semaine du lundi **17 novembre**.*

*Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.*

### Systèmes linéaires : chapitre complet

**8.1** Le théorème des opérations élémentaires. Utilisation pour la mise en œuvre de l'algorithme du pivot de Gauss, permettant de déterminer un système échelonné équivalent à un système donné. Exemple de systèmes à paramètres.

**8.2** Combinaisons linéaires d'éléments de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à $n$ inconnues est stable par combinaisons linéaires, et contient $0_{\mathbb{R}^n}$ : on dit que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Système linéaire homogène $(S_h)$ associé à un système linéaire $(S)$, lien entre les solutions de $(S)$ et de $(S_h)$.

*Cette partie du cours est à lire par les élèves, seul le début a été abordé en classe.*

### Ensembles

**8.3** Inclusion, parties d'un ensemble. Egalité d'ensembles. Ensemble des parties d'un ensemble.

**8.4** Opérations ensemblistes : réunion, intersection, complémentaire de parties d'un ensemble $E$. Différence ensembliste $A\backslash B$ de deux ensembles $A$ et $B$.

**8.5** Parties disjointes d'un ensemble $E$ : définition et caractérisation ($A$ et $B$ sont disjointes si et seulement si $A \subset \bar{B}$, si et seulement si $B \subset \bar{A}$).

**8.6** Propriétés usuelles des opérations ensemblistes (propositions 18 à 23).

**8.7** Produit cartésien $E \times F$ d'ensembles $E$ et $F$. Généralisations pour plus de deux ensembles, notation $E^n$.

**8.8** Réunions et intersections généralisées. Equivalence :

$$\bigcup_{i\in I} E_i \subset B \iff \forall i \in I, E_i \subset B.$$

Équivalence similaire pour l'intersection.

**8.9** Famille d'éléments d'un ensemble $E$ indexée par un ensemble $I$, ensemble $E^I$.

### Python

**8.10** Rien de nouveau cette semaine (le TD de mardi a été déplacé au jeudi).

### Quelques questions de cours

*Conformément au programme de la semaine dernière, tout élève devra poser au moins une division euclidienne de polynôme pendant sa colle (en question de cours ou au cours d'un premier exercice).*

1. Résoudre le système linéaire (sans paramètre) à $n$ inconnues et $p$ équations suivant : au choix de l'interrogation, avec $(n,p) = (3,4)$ ou $(n,p) = (4,3)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire $(S_\lambda) : \begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$ d'inconnues $x, y, z$.
3. Définir les opérations ensemblistes de réunion, d'intersection et de complémentaire. Énoncer les propriétés de commutativité, d'associativité, et distributivité et les lois de De Morgan dans ce contexte. Démontrer certain de ces points, au choix de l'interrogation.
4. Énoncer et démontrer la caractérisation des parties disjointes.
5. Énoncer et démontrer les propriétés de l'intersection (prop 18).
6. Énoncer les propriétés de la réunion (prop 19). Montrer $A \cup B \subset C \iff A \subset C$ et $B \subset C$, pour toutes parties $A, B, C$ d'une ensemble $E$ (élèves : cherchez cet exercice 21 ce week-end, et utilisez Discord si vous bloquez).
   Simplifier, pour toutes parties $A$ et $B$ d'un ensemble $E$, $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$. Représenter l'égalité obtenue sur un dessin.
7. Énoncer et démontrer les propriétés du complémentaire (prop. 22).
8. Définir les notions de réunions et d'intersections généralisées. Énoncer la proposition (33) caractérisant des inclusions relatives à ces ensembles. Démontrer l'énoncé faisant intervenir une réunion généralisée.