TD de mathématiques n°7 : Ensembles et applications

Pour commencer

Ensembles

Exercice 1 Soit E un ensemble usuel (un ensemble de nombres, de fonctions, de suites, d'applications... non vide) et soit $x \in E$. Parmi les propriétés ci-dessous, lesquelles sont correctes?

(a) $x \in \{x\}$	(c) $x \in \{\{x\}\}$	(e) $x \subset \{x\}$	(g) $x \subset \{\{x\}\}$
(b) $\{x\} \in \{x\}$	(d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$	(f) $\{x\} \subset \{x\}$	(h) $\{x\} \subset \{\{x\}\}$

(HP : Quelles énoncés deviennent corrects pour $x = \emptyset$ dans le cas où E est un ensemble d'ensembles?)

Exercice 2 Soient E un ensemble et $A, B \subset E$. Simplifier les expressions :

(a) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

(b) $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})$

(c) $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$

Exercice 3 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. Montrer que $A \cup B = A \cap B \iff A = B$.

Exercice 4 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. Montrer que $\bar{A} \subset B \iff \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \iff E = A \cup B$.

Exercice 5 Soit E un ensemble et $A, B, C \subset E$.

On suppose que $A \subset B \cap C$ et $B \cup C \subset A$. Montrer que $A = B = C$.

Exercice 6 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On suppose que $A \cup B = A \cap C, B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$. Montrer que $A = B = C$.

Exercice 7 Soit E un ensemble. Pour tout sous-ensemble $A \subset E$, on considère la fonction $\mathbf{1}_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par :

$$\forall x \in E, \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On dit que $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de A (en tant que partie de E). Montrer que pour tout $A \subset E$, pour tout $B \subset E$:

(a) $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$

(b) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$

(c) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$

Exercice 8 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. On pose $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ et on dit que Δ est l'opération de différence symétrique.

(a) Représenter sur un diagramme cette notion de différence symétrique.

(b) Déterminer $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$ lorsque $A \subset E$.

(c) Montrer que pour toutes parties $A, B \subset E$, on a $A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$.

(d) Comment interpréter en termes logiques l'opération Δ ?

Exercice 9

(a) Déterminer $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$ et $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$.

(b) Soit E un ensemble, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}.$$

On dit que cette suite de parties de E est croissante pour l'inclusion. Déterminer $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

On commencera par représenter la situation sur un diagramme de Venn.

Exercice 10 On pose $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.

(a) Décrire les éléments de E. Justifier qu'on peut interpréter E comme l'ensemble des résultats d'une suite infinie de lancers d'une pièce à pile ou face.

Dans toute la suite de cet exercice, on adopte cette interprétation de l'ensemble E et va interpréter des parties de E selon cette expérience aléatoire.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_i = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E | u_i = 1\}$.

(b) Donner un élément de P_1, et un élément de P_2. Interpréter, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble P_i selon l'interprétation précédente de E. En faire de même pour les ensembles $\bar{P}_i$.

(c) Déterminer $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} P_i$. Interpréter cet ensemble.

(d) De même, déterminer et interpréter l'ensemble $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \bar{P}_i$. Que dire de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} P_i$?

(e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Interpréter l'ensemble $\bigcup_{i\geq k} P_i$.

(f) En déduire l'interprétation de $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{i\geq k} P_i \right)$

Ensembles et probabilités

Exercice 11

(a) Déterminer $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$.

(b) Soit E un ensemble, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}.$$

On dit que cette suite de parties de E est croissante pour l'inclusion. Déterminer $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On commencera par représenter la situation sur un diagramme de Venn.

Exercice 12 On pose $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.

(a) Décrire les éléments de E. Justifier qu'on peut interpréter E comme l'ensemble des résultats d'une suite infinie de lancers d'une pièce à pile ou face.

Dans toute la suite de cet exercice, on adopte cette interprétation de l'ensemble E et va interpréter des parties de E selon cette expérience aléatoire.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_i = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E | u_i = 1\}$.

(b) Donner un élément de P_1, et un élément de P_2. Interpréter, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble P_i selon l'interprétation précédente de E. En faire de même pour les ensembles $\bar{P}_i$.

(c) Déterminer $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} P_i$. Interpréter cet ensemble.

(d) De même, déterminer et interpréter l'ensemble $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \bar{P}_i$. Que dire de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} P_i$?

(e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Interpréter l'ensemble $\bigcup_{i\geq k} P_i$.

(f) En déduire l'interprétation de $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{i\geq k} P_i \right)$

Fonctions : ensembles images et bijections réciproques

Exercice 13 On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x - 1 \end{array}.$$

Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.

Exercice 14 On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$

Déterminer l'ensemble image $f([-1,1])$.

Exercice 15 Montrer que les applications suivantes sont bijectives, et déterminer leurs bijections réciproques :

(a) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-1 \end{array}$

(b) $f : \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array}$

(c) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+e^x\right) \end{array}$

(d) $f : \begin{array}{rcl} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ x & \longmapsto & \ln\left(1-x^2\right) \end{array}$

(e) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-1} \end{array}$

(f) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-x}{1+x} \end{array}$

(g) $f : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$

(h) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x|x| \end{array}$

(i) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$

(j) $f : \begin{array}{rcl}]-\infty,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x} \end{array}$

(k) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$

(l) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x+\sqrt{1+x^2} \end{array}$

Exercice 16 Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$.

(a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ et $f\left(\mathcal{D}_f\right)$.

(b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f\left(\mathcal{D}_f\right)$ et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

(a) Vérifier que la formule $g(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ définie bien une fonction $g : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[1,+\infty[$ de réciproque g.

Exercice 18 On considère les trois fonctions f, g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par les trois formules

$$f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, g(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \text{ et } h(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

(a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$sur $[1,+\infty$ [et déterminer sa bijection réciproque.

(b) Démontrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.

(c) Démontrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur] - 1,1[et déterminer sa bijection réciproque.

Applications

Exercice 19 L'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}\right.$ est-elle bijective? Si oui, déterminer sa réciproque.

Exercice 20 Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x+y+3z, 3x+y+7z) \end{array}\right.$.

(a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. A quelle condition (a,b,c) admet-il un antécédent par f? En déduire l'ensemble image $f(\mathbb{R}^3)$ de f.

(b) Soit $(a,b,c) \in f(\mathbb{R}^3)$. Déterminer les antécédents de (a,b,c) par f.

(c) f est-elle injective ?

Exercice 21 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(a) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

(b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 22 Soit $f : E \longrightarrow E$ une application.

Montrer que $f \circ f$ est bijective si, et seulement si, f est bijective.

Exercice 23 Soit $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Lorsque ces conditions équivalentes sont réalisées, déterminer f^{-1}.

Exercice 24 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $A, B \subset E$.

(a) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(c) A-t-on nécessairement $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

(d) Montrer que f est injective $\Longleftrightarrow (\forall A \subset E, \forall B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B))$.

Exercice 25 Soit E un ensemble, $A \subset E$ et $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$.

(a) Montrer que f est injective si, et seulement si, $A = E$.

(b) Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A = E$.

Exercice 26 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$.

(a) Montrer que f est injective $\Longleftrightarrow A \cup B = E$.

(b) Montrer que f est surjective $\Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

(c) Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1}.

Pour continuer

Exercice 27 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. Montrer que $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = B \Longleftrightarrow A = \emptyset$.

Exercice 28 Soit E un ensemble et $A, B, C \subset E$.

Montrer que $A \cup B = B \cap C \Longleftrightarrow A \subset B \subset C$.

Exercice 29 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

On suppose que $A \cup B = A \cap C$ et $A \cap B = A \cup C$. Montrer que $A = B = C$.

Exercice 30 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

On suppose que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$. Montrer que $A = B$.

Exercice 31 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$.

Déterminer tous les sous-ensembles $X \subset E$ tels que $A \cup X = B$ (resp. $A \cap X = B$).

Exercice 32 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. On rappelle que $A \backslash B = \{a \in A | a \notin B\}$.

(a) Représenter sur un diagramme cette notion de différence. Montrer $A \backslash B = A \cap \bar{B}$.

(b) Déterminer $A \setminus A$ et $A \backslash \emptyset$ lorsque $A \subset E$.

(c) Montrer l'équivalence : $A \backslash B = A \Longleftrightarrow B \backslash A = B$ (comment se nomme ce cas?).

Exercice 33 On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \backslash \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x-1}{x+1} \end{array}$.

Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R} \backslash \{-1\})$.

Exercice 34 On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}$.

Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.

Exercice 35 On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{array}$$

Déterminer l'ensemble image $f(]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$.

Exercice 36 Soit f la fonction définie par la formule $f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+1}}$.

(a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ et $f\left(\mathcal{D}_f\right)$.

(b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f\left(\mathcal{D}_f\right)$ et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 37 On considère la fonction définie par la formule $f(x)=x+\ln\left(2+e^{x}\right)$.

Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis $f\left(\mathcal{D}_f\right)$ et montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f\left(\mathcal{D}_f\right)$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 38 Soit E un ensemble, $A\subset E$ et $f:\begin{array}{ccc}\mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E)\\ X & \longmapsto & X\cup A\end{array}$.

(a) Montrer que f est injective si, et seulement si, $A=\emptyset$.

(b) Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A=\emptyset$.

Exercice 39 Soit E un ensemble et $f:\begin{array}{ccc}\mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E)\\ X & \longmapsto & \bar{X}\end{array}$.

(a) Déterminer l'application $f\circ f$.

(b) En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 40 Soit E un ensemble, $A\subset E$ et $B\subset E$.

On rappelle que la différence symétrique de A et B le sous-ensemble de E défini par :

$$A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$$

(a) Soient $A,B\subset E$. Déterminer $A\Delta(A\Delta B)$.

(b) Montrer que l'application $\begin{array}{c}f:\mathcal{P}(E)\longrightarrow\mathcal{P}(E)\\ B\longmapsto A\Delta B\end{array}$ est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 41 Pour tous ensembles E et F et toute application $f:E\longrightarrow F$, on pose $\widehat{f}:\begin{array}{cc}\mathcal{P}(E) & \longrightarrow\mathcal{P}(F)\\ X & \longmapsto f(X)\end{array}$.

(a) Soit $f:E\longrightarrow F$. Montrer que : $\widehat{f}$ est injective $\Longleftrightarrow$ f est injective.

(b) Soit $f:E\longrightarrow F$. Montrer que : $\widehat{f}$ est surjective $\Longleftrightarrow$ f est surjective.

(c) Soit $f:E\longrightarrow F$. Montrer que : f bijective $\Longrightarrow(\widehat{f})^{-1}=\widehat{f^{-1}}$.