Lycée Hoche
ECG1A

2025-2026
Mathématiques

Devoir surveillé numéro 2

*Devoir du **15 novembre 2025**.*

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Questions de cours et d'application directe.*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer le plus formellement possible :
$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0) \iff (\forall n \in [\![2, +\infty[\![, u_n = 0)\,.$$

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
   (a) Nier la proposition P suivante :
$$\forall x \in]a, b[, \exists \epsilon > 0, a < x + \epsilon < b.$$
   (b) Démontrer P.

3. On pose $D = [2, +\infty[$. On rappelle que $D \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples (x, y) de réels tels que $x \in D$ (et $y \in \mathbb{R}$).
   Montrer que $\{(x, y) \in D \times \mathbb{R} | x - y = -1\} = \{(t^2 + 2, t^2 + 3) | t \in \mathbb{R}\}$.

4. (a) Définir la notion de minorant d'une fonction réelle sur une partie D de $\mathbb{R}$.
   (b) Est-il vrai que toute fonction admettant un minorant sur $\mathbb{R}$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$? Le démontrer.

5. Soit f une fonction réelle définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement croissante sur D, alors elle est injective sur D.

6. Compléter et démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \ldots$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i + j)$.

8. Définir la notion de suite géométrique.

9. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 2X^2 + 1$ par $X^2 - 2X - 2$. On conclura en écrivant l'égalité de division euclidienne ainsi obtenue.

10. Écrire un code Python d'entête `def f(n,x):` prenant en entrée un entier naturel `n` et un nombre `x` (de type `float`) et renvoyant en sortie le terme $u_{\mathtt{n}}$ de la suite u définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = nu_n - \mathtt{x}^n \end{cases}.$$

11. Sans justification, que renvoie la fonction `Question` définie ci-dessous appliquée à la liste `[6,2,3,1,3,6]` ?

```python
def Question(L):
    G=[]
    for i in range(len(L)):
        if i%2==0:
            G.append(L[i])
    return(G)
```

Exercice 2 *Quelques techniques, les questions numérotées par des entiers sont indépendantes.*

1. (*a*) Factoriser au maximum le polynôme $X^3 - X^2 - 4X - 2$, puis donner ses racines.

   (*b*) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(E) : e^{2x} - e^x = 4 + 2e^{-x}$.

2. Calculer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

   (*a*) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2n}$. (*b*) $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n\frac{2^n + 2^k}{5^{k-1}}$. (*c*) $U_n = \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k}{n})\right)$.

4. On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^{x-1} \end{array} \right.$.

   (*a*) Montrer que f est bien définie.

   (*b*) Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et calculer f' sur cet intervalle.

   (*c*) À l'aide d'une inégalité du cours, montrer : $\forall x > -1, f'(x) \leq \dfrac{x^2+2x-1}{x+1}(x+1)^{x-1}$.

   (*d*) En déduire que f est strictement décroissante sur $]-1, \sqrt{2}-1]$.

5. On considère la fonction `Mystere` suivante, prenant en entrée une liste de nombres `L`.

```
def Mystere(L):
    G=[]
    for elem in L:
        if elem>0 :
            s=1
        elif elem==0 :
            s=0
        else :
            s=-1
        G.append( (s,elem**2) )
    return(G)
```

   (*a*) Sans justification, que renvoie la fonction `Mystere` appliquée à la liste `[1,3,-2,0]` ?

   (*b*) Décrire (sans justification) le renvoi de la fonction `Mystere`, en général.

   (*c*) On souhaite retrouver une liste de nombres `L` à partir de la connaissance seule de `Mystere(L)`.

   Compléter le code suivant pour que la fonction d'entête `InverseMystere(G):`, prenant en entrée une liste `G` convenable (c'est-à-dire, obtenue en sortie d'un appel de la fonction `Mystere`), renvoie en sortie une liste `L` telle que `G` soit `Mystere(L)`.

```
...
def InverseMystere(G):
    L=[]
    for i in ... :
        elem=G[i]
        a,b=elem[0],elem[1]
        e=...
        L.append(e)
    return(L)
```

Exercice 3 *Étude d'une suite.*

On considère la suite u donnée par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$.

1. On veut écrire une fonction **Python** d'entête `def U(n):` prenant en entrée un entier `n` et renvoyant la valeur de $u_{\mathtt{n}}$. Recopier et compléter le code ci-dessous.

```
def U(n):
    u0,u1=1,4
    for i in range(...):
        u0,u1=...,...
    return(...)
```

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

   (b) En déduire une expression du terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = 4n + 2 + \frac{1}{2^n}$.

   (d) Déduire des questions précédentes une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 *Un petit calcul de somme*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3$.

1. Écrire une fonction Python nommée `S` prenant en entrée un entier naturel `n` non nul et renvoyant en sortie la valeur de $S_{\mathtt{n}}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)^3\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3\right)$.
3. Développer $(a+b)^3$, pour tous réels a et b.
4. En déduire une expression simplifiée de S_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 *Étude d'une fonction et d'une suite.*

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

   (a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $g'(x)$ pour tout réel x.

   (b) Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.

2. (a) Déterminer le domaine de définition D de f.

   (b) Montrer que f est dérivable sur D, et exprimer f' en fonction de g.

   (c) En déduire le tableau de variation de f (limites non attendues). On admet que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

3. (a) Montrer que, pour tout réel x, $e^x - 1 \geq x$ et étudier le cas d'égalité.

   (b) En déduire le signe strict de f sur D.

On considère la suite u donnée par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

4. (*a*) Écrire une fonction `Python` d'entête `def f(x):` prenant en entrée un nombre `x` (de type `float`) et renvoyant la valeur $f(\mathtt{x})$. *Vous pourrez (et devrez) utiliser* `f` *dans les questions Python de la suite de l'exercice, même si vous passez cette question.*

   (*b*) Écrire une fonction `Python` d'entête `def ListeU(n):` prenant en entrée un entier supposé positif `n` et renvoyant la liste `[`u_0`,` u_1`, ...` u_n`]` des termes de u d'indice inférieur à `n`.

5. Montrer que pour tout entier n, u_n est bien défini et est strictement positif.

6. (*a*) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq x$.

   (*b*) Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur D.

   (*c*) Tracer le graphe de f sur le même graphique que cette droite. Sur ce graphique, placer (en laissant les traits de construction) u_0, u_1, u_2, u_3.

7. Montrer que u est strictement monotone.

8. On admet qu'il existe un entier N tel que $u_N < 10^{-5}$. Montrer $\forall n \geq N, u_n < 10^{-5}$.

9. On souhaite écrire un code `Python` permettant de calculer le premier entier N tel que

$$\forall n \geq N, u_n < 10^{-5}.$$

Recopier et compléter le code `Python` suivant (en remplaçant les `??`) pour qu'à la fin de son exécution, la variable `N` contienne l'entier voulu, et s'affiche à l'écran.

```
N=0
u=1
while ??:
    N=??
    u=??
print(??)
```

Exercice 6 *Une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.*

L'objectif de cet exercice est de déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \; u_1 = 0, \; u_2 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}.$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 3.

On note (E) l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ d'inconnue réelle x.

1. Résoudre (E).

2. (*a*) Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, telle que $v_0 \neq 0$. Montrer :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n) \iff q \in \{-1, 1, 2\}.$$

   (*b*) Que dire si $v_0 = 0$?

3. Soient α, β et γ des réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n$.

   (*a*) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+3} = 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n$.

   (*b*) Déterminer les valeurs de α, β et γ pour lesquelles $w_0 = 0$, $w_1 = 0$ et $w_2 = 1$.

4. Conclure.

— Fin de l'énoncé —