

Corrigé du DS n°2

DS du 15 novembre.

Exercice 1

1. Notons P la proposition " $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0$ " et Q la proposition " $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, u_n = 0$ ".

- Montrons $P \implies Q$.

Supposons P , montrons $Q : \forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, u_n = 0$.

Soit $n \geq 2$ un entier, montrons $u_n = 0$.

On pose $k = n - 2$. $k \in \mathbb{N}$ donc d'après P , $u_{k+2} = 0$.

$k + 2 = n$ donc $u_n = 0$.

Ceci montre Q , d'où cette première implication.

- Montrons $Q \implies P$.

Supposons Q , montrons $P : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons $u_{n+2} = 0$.

$n + 2 \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ car $n \in \mathbb{N}$, donc d'après $Q : u_{n+2} = 0$.

Ceci montre P , d'où cette seconde implication.

On a bien montré $P \iff Q$, par double implication.

2. (a) La négation de P est : $\exists x \in]a, b[, \forall \epsilon > 0, x + \epsilon \leq a$ ou $b \leq x + \epsilon$.

(b) Soit $x \in]a, b[$.

Posons $\epsilon = \frac{b - x}{2}$.

$x < b$ donc $b - x > 0$ donc $\frac{b - x}{2} > 0$ (car $2 > 0$).

Donc $\epsilon > 0$ et :

$$b - (x + \epsilon) = b - x - \frac{b - x}{2} = \frac{b - x}{2} = \epsilon > 0.$$

Donc $b > x + \epsilon$. De plus, $a < x < x + \epsilon$ car $\epsilon > 0$. Donc $a < x + \epsilon$.

Finalement, on a trouvé $\epsilon > 0$ tel que $a < x + \epsilon < b$.

Donc : $\exists \epsilon > 0, a < x + \epsilon < b$, et ce pour tout $x \in]a, b[$.

3. On pose $A = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} | x - y = -1\}$ et $B = \{(t^2 + 2, t^2 + 3) | t \in \mathbb{R}\}$.

Montrons $A = B$, par double inclusion.

Soit $a \in A$, montrons $a \in B$.

$a \in A$ donc on dispose de $(x, y) \in D \times \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} a = (x, y) \\ x - y = -1 \end{cases}$.

$x \in D$ donc $x \geq 2$ donc $x - 2 \geq 0$.

Posons donc $t = \sqrt{x - 2}$.

Alors, $t^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$, et $x - y = -1$ donc $y = x + 1 = t^2 + 3$.

On a donc $t \in \mathbb{R}$, et $a = (x, y) = (t^2 + 2, t^2 + 3)$. Ceci montre que $a \in B$.

Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on a : $A \subset B$.

Montrons maintenant $B \subset A$.

Soit $b \in B$, montrons $b \in A$.

$b \in B$ donc on dispose de $t \in \mathbb{R}$ tel que $b = (t^2 + 2, t^2 + 3)$.

Posons $x = t^2 + 2$ et $y = t^2 + 3$.

$t^2 \geq 0$ donc $t^2 + 2 \geq 2$, donc $x \in D$.

On a alors $b = (x, y) \in D \times \mathbb{R}$ et $x - y = (t^2 + 2) - (t^2 + 3) = -1$.

Ceci montre $b \in A$, d'où $B \subset A$.

Par double inclusion, on a bien montré $A = B$.

4. (a) cf cours.

(b) Soit f la fonction exponentielle.

f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$, mais f n'admet pas de minimum.

En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $f(a - 1) < f(a)$ (par croissance stricte) donc f n'a pas de minimum en a sur $\mathbb{R}$: f n'a donc pas de minimum sur $\mathbb{R}$.

L'affirmation est donc fausse.

5, 6, 7, 8 Cf cours.

5. En posant la division euclidienne (le faire sur la copie), on trouve :

$$X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 - 2X - 2)(X^2 + 2X + 8) + 20X + 17.$$

6.

```
def f(n, x):  
    u=1  
    for k in range(n):  
        u=k*u-x**k  
    return(u)
```

7. Elle renvoie la liste $[6, 3, 3]$.

Exercice 2

1. (a) Posons $P(X) = X^3 - X^2 - 4X - 2$.

$P(-1) = -1 - 1 + 4 - 2 = 0$ donc, -1 étant racine de P , $X + 1$ divise P .

La division euclidienne de P par $X + 1$ donne (la poser) : $P(X) = (X + 1)(X^2 - 2X - 2)$.

Le polynôme du second degré $X^2 - 2X - 2$ admet pour discriminant $12 > 0$, donc admet pour racines $\frac{2 - \sqrt{12}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{4 \times 3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.

Donc la forme factorisée de $X^2 - 2X - 2$ est $(X - 1 + \sqrt{3})(X - 1 - \sqrt{3})$.

La factorisation maximale de P est donc : $P(X) = (X + 1)(X - 1 + \sqrt{3})(X - 1 - \sqrt{3})$.

Par produit nul, les racines de P sont exactement $-1, 1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.

(b) L'exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives, (E) est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$e^x \neq 0$ donc :

$$e^{2x} - e^x = 4 + 2e^{-x} \iff (e^{2x} - e^x)e^x = (4 + 2e^{-x})e^x \iff P(e^x) = 0.$$

Donc x est solution de (E) si et seulement si e^x est racine de P .

Par la question précédente, x est solution de (E) si et seulement si :

$$e^x = -1 \text{ ou } e^x = 1 - \sqrt{3} \text{ ou } e^x = 1 + \sqrt{3}.$$

Or, $e^x \neq -1$ et $e^x \neq 1 - \sqrt{3}$ car $-1 < 0$ et $1 - \sqrt{3} < 0$ tandis que $e^x > 0$.

De plus, $1 + \sqrt{3} > 0$ donc $e^x = 1 + \sqrt{3} \iff x = \ln(1 + \sqrt{3})$.

Donc x est solution de (E) si et seulement si $x = \ln(1 + \sqrt{3})$.

L'unique solution de (E) est $\ln(1 + \sqrt{3})$.

2. (a) (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique :

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Cette équation polynomiale du second degré a pour discriminant $16 > 0$, donc ses solutions sont :

$$\frac{2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{2 - 4}{2} = -1 \text{ et } \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

Par théorème, on dispose donc de réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(-1)^n + \mu 3^n.$$

En particulier,
$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 = 1 \\ -\lambda + 3\mu = u_1 = 0 \end{cases}.$$

Donc $\lambda = 3\mu$ et $4\mu = 1$.

Donc $\mu = \frac{1}{4}$ et $\lambda = \frac{3}{4}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3}{4}(-1)^n + \frac{1}{4} \cdot 3^n.$$

(b)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n k^2 + k && \text{(par linéarité)} \\ &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) && \text{(linéarité)} \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) && \text{(on reconnaît des sommes remarquables)} \\ &= \frac{1}{2n} \cdot \frac{n(n+1)}{6} (2n+1+3) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Donc
$$S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

(c)

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n 5n2^n \frac{1}{5^k} + 5n \frac{2^k}{5^k} \\ &= 5n2^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5}\right)^k + 5n \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{5}\right)^k && \text{(par linéarité)} \\ &= 5n2^n \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - (1/5)^n}{1 - 1/5} + 5n \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1 - (2/5)^n}{1 - (2/5)} && \text{(sommes géométriques de raisons } 1/5 \neq 1 \text{ et } 2/5 \neq 1) \\ &= 5n \left(\frac{2^n}{4} - \frac{2^n}{4 \cdot 5^n} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2^n}{5^n} \right) \\ &= 5n \left(\frac{2}{3} + \frac{2^n}{4} - \frac{11}{12} \cdot \frac{2^n}{5^n} \right) \end{aligned}$$

Donc
$$T_n = 5n \left(\frac{2}{3} + \frac{2^n}{4} - \frac{11}{12} \cdot \frac{2^n}{5^n} \right).$$

(d) Par propriété de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} U_n &= \prod_{k=1}^n e^{\ln(k/n)} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{n} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n k}{n^n} \\ &= \frac{n!}{n^n}, \end{aligned}$$

car on reconnaît un produit constant et la définition de $n!$.

Donc $U_n = \frac{n!}{n^n}$.

3. (a) Soit $x > -1$.

Par définition des puissances généralisée, $f(x)$ est défini par l'égalité $f(x) = e^{(x-1)\ln(x+1)}$.

Or, $x > -1$ donc $x+1 > 0$, donc $\ln(x+1)$ est bien défini.

Donc $(x-1)\ln(x+1)$ est bien défini.

L'exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, $f(x)$ est donc bien défini par l'égalité $f(x) = e^{(x-1)\ln(x+1)}$, et ce pour tout $x > -1$.

Donc f est bien définie.

(b) Posons, pour tout $x > -1$, $g(x) = (x-1)\ln(x+1)$.

Alors : $\forall x > -1, f(x) = e^{g(x)}$.

Or, $\ln$ et $x \mapsto x+1$ étant dérivable sur leur domaine, $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur son domaine par composition.

$x \mapsto x-1$ étant dérivable sur son domaine, g est dérivable sur son domaine de définition par produit.

L'exponentielle étant dérivable sur son domaine de définition, f est dérivable sur son domaine de définition comme composée, et :

$$\forall x > -1, f'(x) = g'(x)e^{g(x)} = \left(\ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} \right) e^{(x-1)\ln(x+1)}.$$

Donc
 f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et : $\forall x > -1, f'(x) = \left(\ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} \right) (x+1)^{x-1}$.

(c) On sait que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

Soit $x > -1$.

$$\text{On a donc : } \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} \leq x + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1}.$$

Or, $(x+1)^{x-1} > 0$ car $(x+1)^{x-1} = e^{(x-1)\ln(x+1)}$ et l'exponentielle est à valeurs strictement positives.

Donc par produit :
 $f'(x) \leq \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1} (x+1)^{x-1}$, et ce pour tout $x > -1$.

(d) Le polynôme du second degré $X^2 + 2X - 1$ admet pour discriminant $8 > 0$ donc admet deux racines distinctes : $-1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$.

$\sqrt{2} > 0$ donc $-1 - \sqrt{2} < -1 < -1 + \sqrt{2}$.

Ce polynôme ayant un coefficient dominant strictement positif, on peut établir le tableau de signe suivant.

x	-1	$\sqrt{2}-1$	$+\infty$	
x^2+2x-1	$-$	0	$+$	
$x+1$	0	$+$	$+$	
$\frac{x^2+2x-1}{x+1}$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Soit $x \in]-1, \sqrt{2}-1]$. Par ce qui précède, $f'(x) \leq \frac{x^2+2x-1}{x+1}(x+1)^{x-1}$.

Si $x \in]-1, \sqrt{2}-1[$, alors, $f'(x) \leq \frac{x^2+2x-1}{x+1}(x+1)^{x-1} < 0$ car $\frac{x^2+2x-1}{x+1} < 0$ et $(x+1)^{x-1} > 0$.

Si $x = \sqrt{2}-1$, l'inégalité précédente donne $f'(x) \leq 0$.

Sur l'intervalle $] -1, \sqrt{2}-1]$, f' est donc négative et, étant strictement négative sur $] -1, \sqrt{2}-1[$, f' s'annule au plus une fois (éventuellement en $\sqrt{2}-1$).

Par théorème, f est strictement décroissante sur $] -1, \sqrt{2}-1]$.

4. (a) `Mystere( [1,3,-2,0] )` renvoie la liste : `[ (1,1), (1,9), (-1,4), (0,0) ]`.

(b) Appliquée à une liste de nombres $L = [l_1, \dots, l_n]$, mystère renvoie la liste de couples

$$[(s_1, l_1^2), (s_2, l_2^2), \dots, (s_n, l_n^2)]$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, s_i donne le signe de l_i : s_i vaut 1 si l_i est strictement positif, 0 s'il est nul et -1 sinon.

(c)

```
import numpy as np

def InverseMystere(G):
    L=[]
    for i in range(len(G)):
        elem=G[i]
        a,b=elem[0],elem[1]
        e=a*np.sqrt(b)
        L.append(e)
    return(L)
```

Exercice 3

1. `def U(n):`
`u0,u1=1,4`
`for i in range(n):`
`u0,u1=u1,(3/2)*u1-(1/2)*u0+2`
`return(u0)`

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + 2 - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) + 2 = \frac{1}{2}v_n + 2$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2.$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite arithmético-géométrique.

(b) Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors, $l = \frac{1}{2}l + 2 \iff l = 4$. Ainsi,

$$v_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}v_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}v_n - 2 = \frac{1}{2}(v_n - 4).$$

La suite $(v_n - 4)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 - 4 = u_1 - u_0 - 4 = 3 - 4 = -1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - 4 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

(c) Calculons, à l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k &= \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n 4 - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k && \text{(par linéarité)} \\ &= 4(n+1) - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} && \text{(somme constante et somme géométrique de raison } \frac{1}{2} \neq 1) \\ &= 4(n+1) - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 4n + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k = 4n + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k = 4n + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'autre part, $\sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k$ est une somme télescopique donc :

$$\sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0.$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = u_0 + 4n + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 4n + 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ce qui revient à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 4(n-1) + 3 + \frac{1}{2^{n-1}} = 4n - 1 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On remarque que la formule est aussi valable pour $n = 0$, d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4n - 1 + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

Exercice 4

1.

```
def S(n):
    som=0
    for k in range(1,2*n+1):
        som += ((-1)**k)*(k**3)
    return(som)
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^k k^3 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^k k^3.$$

$$\text{Or, pour tout entier } k, (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par linéarité :

$$S_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k^3 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k^3.$$

Enfin :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k^3 = \sum_{k=1}^n (2k)^3 \text{ et } \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k^3 = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = \sum_{j=1}^n (2j-1)^3$$

en posant $j = k + 1$ dans la seconde somme.

On a donc montré : $S_n = \left(\sum_{k=1}^n (2k)^3 \right) - \left(\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 \right)$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour tous réels a et b : $(a-b)^3 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) = a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Donc $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente, pour tout k entier :

$$(2k-1)^3 = (2k)^3 - 3(2k)^2 + 3 \cdot 2k - 1 = (2k)^3 - 12k^2 + 6k - 1.$$

Par linéarité, avec la question 2:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k)^3 - (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^n 12k^2 - 6k + 1 = 12 \sum_{k=1}^n k^2 - 6 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$$

On reconnaît des sommes remarquables :

- $12 \sum_{k=1}^n k^2 = 12 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2n(n+1)(2n+1),$
- $6 \sum_{k=1}^n k = 6 \frac{n(n+1)}{2} = 3n(n+1),$
- $\sum_{k=1}^n 1 = n.$

Donc :

$$\begin{aligned} S_n &= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n \\ &= n(2(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 1) \\ &= n(4n^2 + 6n + 2 - 3n - 3 + 1) \\ &= n(4n^2 + 3n) \\ &= n^2(4n + 3). \end{aligned}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = n^2(4n + 3).$

Exercice 5

1. (a) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et produit à partir des fonctions usuelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1$ toutes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x.$$

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)$ est du signe de x (car $e^x > 0$).

Ainsi, g' est négative sur l'intervalle $\mathbb{R}_-$ et s'annule uniquement en 0. Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

De même, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

g atteint donc un minimum en 0 qui vaut $g(0) = 0$ d'où le tableau de signe de g (complété par monotonie stricte):

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

L'expression $\frac{e^x - 1}{x}$ est définie si et seulement si $x \neq 0$. D'autre part, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$\frac{e^x - 1}{x}$	+		+

qui montre que l'expression $\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathbb{R}^*$.

La fonction f a donc pour domaine $D = \mathbb{R}^*$.

- (b) $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions dérivables sur leur domaine de définition.

$x \mapsto \ln(x)$ étant également dérivable sur son domaine de définition, $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur leur domaine de définition.

Pour tout $x \in D$:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} \times \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{g(x)}{x(e^x - 1)}.$$

Donc f est dérivable sur D et : $\forall x \in D, f'(x) = \frac{g(x)}{x(e^x - 1)}$.

- (c) D'après la question précédente et la question 1b ($\forall x \in D = \mathbb{R}^*, g(x) > 0$), $f'(x)$ est du signe de $x(e^x - 1)$ pour tout $x \in D$. D'où le tableau de signes et de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	+		+
f	$\nearrow 0$		$0 \nearrow$

3. (a) On a déjà démontré plusieurs fois l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ à l'aide d'une étude de fonction, et il fallait le refaire ici en observant la conclusion supplémentaire : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = x + 1 \iff x = 0$.
- (b) Soit $x > 0$.

D'après la question précédente, on a donc $e^x - 1 > x$ (car $x \neq 0$) et $x > 0$ donc :

$$\frac{e^x - 1}{x} > 1.$$

Par stricte croissance de $\ln$,

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) > \ln(1) = 0$$

Donc : $\forall x > 0, f(x) > 0$.

De même, pour tout $x < 0, e^x - 1 > x$ et :

$$e^x - 1 > x \implies \frac{e^x - 1}{x} < 1 \implies f(x) < \ln(1) = 0.$$

Donc f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$.

4. (a)

```
import numpy as np
def f(x):
    return np.log((np.exp(x)-1)/x)
```
- (b)

```
def ListeU(n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        L.append(f(L[-1]))
    return(L)
```

5. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: " u_n est bien défini et $u_n > 0$ ".

Initialisation. L'égalité $u_0 = 1$ définit bien u_0 comme un réel strictement positif, d'où l'initialisation.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.

Alors, par $P(n)$, u_n est bien défini et $u_n \in \mathbb{R}_+^*$. Donc $u_n \in D$ et $f(u_n) \in \mathbb{R}_+^*$ d'après la question 3(b).

Ainsi, u_{n+1} est bien défini par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et $u_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$.

On a bien démontré $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

Finalement, on a bien démontré par récurrence que

Pour tout entier n , u_n est bien défini et $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

6. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) \leq x &\iff \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x && \text{par stricte croissance de l'exponentielle} \\ &\iff \frac{e^x - 1 - xe^x}{x} \leq 0 \\ &\iff \frac{-g(x)}{x} \leq 0 \\ &\iff -g(x) \leq 0 && \text{car } x > 0 \end{aligned}$$

Or, le tableau de signe de g donné question 1. montre que la dernière proposition est vraie. On a donc bien:

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq x$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$.

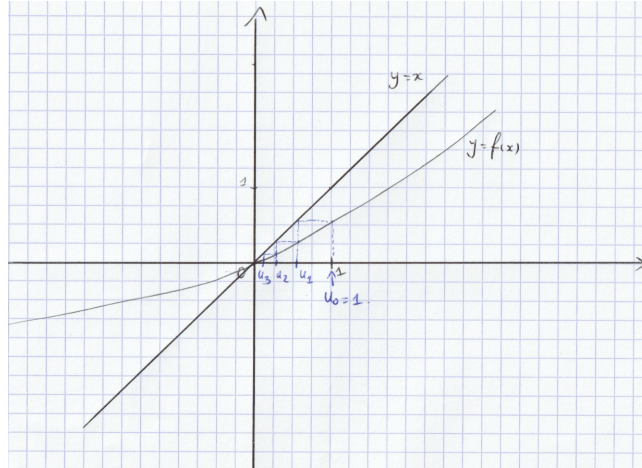
$$\begin{aligned} f(x) \leq x &\iff \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x && \text{par stricte croissance de l'exponentielle} \\ &\iff \frac{e^x - 1 - xe^x}{x} \leq 0 \\ &\iff \frac{-g(x)}{x} \leq 0 \\ &\iff -g(x) \geq 0 && \text{car } x < 0 \end{aligned}$$

$g(x)$ étant strictement positif (question 1), la dernière proposition est fausse donc $f(x) > x$, et ce pour tout $x < 0$.

Donc la courbe de f est :

- au dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}_-^*$,
- en dessous de cette droite sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente.

- (c) On en tire des questions précédentes l'allure suivant du graphe de f . Remarque : on a montré que f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.



7. En reprenant la démonstration de l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq x$ dans la question 5a), on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) < x \iff g(x) > 0.$$

Le tableau de signe de g montre alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) < x.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a démontré $u_n > 0$, donc d'après l'inégalité précédente, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$. Ceci prouve :

la suite u est strictement décroissante.

8. C'est une simple conséquence de la décroissance de u : pour tout $n \geq N, u_n \leq u_N < 10^{-5}$.

Donc $\forall n \geq N, u_n < 10^{-5}$.

- 9.

```
N=0
u=1
while u >= 10**(-5):
    N=N+1
    u=f(u)
print(N)
```

Exercice 6

1. Posons $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

(E) est l'équation polynomiale $P(x) = 0$ donc est définie sur $\mathbb{R}$.

$P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$, et de même $P(-1) = P(2) = 0$. P étant de degré 3, admettant 3 racines distinctes 1, -1 et 2, et étant de coefficient dominant 1, on a la factorisation :

$$P(X) = (X - 1)(X + 1)(X - 2).$$

Par produit nul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0.$$

Donc Les solutions de (E) sont 1, -1 et 2.

2. (a) Procédons par double implication.

- Montrons $(\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n) \implies q \in \{-1, 1, 2\}$.

Supposons $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n$.

En particulier, $v_3 = 2v_2 + v_1 - 2v_0$.

$(v_n)_n$ étant géométrique de raison q :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n.$$

Donc :

$$v_0 q^3 = 2v_0 q^2 + v_0 q - 2v_0.$$

$v_0 \neq 0$ donc en divisant par v_0 :

$$q^3 = 2q^2 + q - 2.$$

Donc q est solution de (E) : par la question précédente, $q \in \{-1, 1, 2\}$.

D'où cette première implication.

- Montrons $q \in \{-1, 1, 2\} \implies (\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $q \in \{-1, 1, 2\}$, q est solution de (E) donc :

$$q^3 = 2q^2 + q - 2.$$

Donc, en multipliant par $v_0 q^n$:

$$v_0 q^{n+3} = 2v_0 q^{n+2} + v_0 q^n + 1 - 2v_0 q^n.$$

Donc $v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où cette seconde implication.

On a bien montré : $(\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n) \implies q \in \{-1, 1, 2\}$.

- (b) Si $v_0 = 0$, alors $(v_n)_n$ est la suite nulle et la relation de récurrence est vérifiée quelque soit q .

3. (a) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} a_n = \alpha \\ b_n = \beta(-1)^n \\ c_n = \gamma 2^n \end{cases}.$$

Alors, les suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ sont trois suites géométriques de raisons respectives 1, -1 et 2.

D'après les questions 2a) et 2b), on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$$

et la même relation est vraie avec les suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+3} &= a_{n+3} + b_{n+3} + c_{n+3} \\ &= (2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n) + (2b_{n+2} + b_{n+1} - 2b_n) + (2c_{n+2} + c_{n+1} - 2c_n) \\ &= 2(a_{n+2} + b_{n+2} + c_{n+2}) + (a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1}) - 2(a_n + b_n + c_n) \\ &= 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n. \end{aligned}$$

On a donc bien montré : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+3} = 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n$.

(b)

$$\begin{aligned}
\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 0 \\ w_2 = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 4\gamma = 1 \end{cases} \\
&\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff}} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -2\beta + \gamma = 0 \\ 3\gamma = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha = -\beta - \gamma = -1/3 - 1/6 = -1/2 \\ \beta = \frac{1}{2}\gamma = 1/6 \\ \gamma = 1/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $w_0 = 0, w_1 = 0$ et $w_2 = 1$ si et seulement si $(\alpha, \beta, \gamma) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$.

4. Prenons les valeurs de α , β et γ trouvées dans la question précédente et considérons la suite $(w_n)_n$ qui y est définie.

Montrons par récurrence sur trois rangs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "u_n = w_n".$$

Initialisation :

D'après le choix de α , β et γ et le résultat de la question 3b) :

$$\begin{cases} w_0 = 0 = u_0 \\ w_1 = 0 = u_1 \\ w_2 = 1 = u_2 \end{cases}.$$

Ceci montre $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $P(n)$, $P(n+1)$ et $P(n+2)$.

Montrons $P(n+3)$.

On a :

$$\begin{aligned}
w_{n+3} &\stackrel{(1)}{=} 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n \\
&\stackrel{(2)}{=} 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \\
&\stackrel{(3)}{=} u_{n+3}
\end{aligned}$$

(1) : D'après 3a).

(2) : D'après $P(n)$, $P(n+1)$ et $P(n+2)$.

(3) : D'après la relation de récurrence vérifiée par $(u_k)_k$.

Ceci montre $P(n+3)$, d'où l'hérédité.

On a donc montré par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$.

— Fin du corrigé —