Devoir surveillé numéro 1

Devoir du ***7 octobre 2023****.*

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Questions de cours. Les questions numérotées par des entiers sont indépendantes entre elles.*

1. (*a*) Nier la proposition $P : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, z > y \implies e^z > x$.

   (*b*) La proposition P est-elle vraie?

2. Montrer que $n(3n+1)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_{>-1}, x \geq \ln(1+x)$.
4. Définir précisément la notion de fonction paire.
5. Soient f et g deux fonctions réelles strictement décroissantes sur leurs domaines de définition. Que dire de la monotonie de $g \circ f$ sur son domaine de définition? Le démontrer.
6. Soit x un réel. Définir précisément $\lfloor x \rfloor$ après avoir donné, sans démonstration, la proposition permettant de poser cette définition. Enfin, tracer sans démonstration une représentation du graphe de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
7. Comparer les réels $\sqrt{10} - 2$ et $\sqrt{3}$. *Comparer veut dire : les comparer avec une inégalité* $<, >$, *ou avec une égalité le cas échéant.*
8. Soit n un entier, et $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Montrer :
$$a_1 + \ldots + a_n \geq 1 \implies \exists k \in [\![1, n]\!], a_k \geq \frac{1}{n}.$$
9. Écrire un code `Python` permettant de calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2023}(1 + k + k^2)$.
10. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2 *Un premier "exercice 2".*
Dans cet exercice, les équations et inéquations sont toutes d'inconnues réelle notée x.

1. Résoudre l'équation $x^4 + 2 = 0$.
2. Résoudre l'inéquation $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) < 0$.
3. Résoudre l'équation $e^{2x} - e^x - 1 = 0$.
4. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t+1} - t + 1}$.
5. Résoudre l'inéquation $|x^2 - 2x + 2| < 3$.
6. Déterminer l'ensemble de définition, de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f : t \mapsto (1+t)^{\ln(t)}$.

Exercice 3 *Deux équations ou inéquations paramétriques.*
Pour tout réel y, on note (E_y) l'équation $y^2x^2 + 2ye^{\frac{y}{2}}x + y + 1 = 0$.

1. Résoudre l'équation (E_0).
2. Soit $y \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Montrer que l'équation (E_y) est polynomiale de degré 2, et calculer son discriminant.
   (b) Montrer que pour tout réel t : $e^t \geq 1 + t$, et que : $e^t = 1 + t \iff t = 0$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_y).
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x donnée par $\ln\left(\left|\dfrac{1+mx}{1-x}\right|\right) > 0$ en fonction de m.

Exercice 4 *Un tracé de courbe.*
Soit f la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$. Le but de cet exercice est de construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

1. Montrer que le domaine de définition D_f de f est $\mathbb{R}^*$.
2. La fonction f est-elle paire, impaire? Qu'en déduire sur les propriétés de symétrie de $\mathcal{C}$?
3. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition, et donner une expression de f'.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$. Le compléter à l'aide des limites admises suivantes:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$
5. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Donner les valeurs exactes de $f(\ln(3))$ et $f'(\ln(3))$.
7. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $\ln(3)$.
8. À l'aide des résultats précédents, construire $\mathcal{C}$ le plus fidèlement possible. On tracera en particulier la tangente précédemment déterminée. On utilisera les approximations suivantes : $\ln(3) \simeq 1,1$, $\dfrac{9}{16} \simeq 0,6$, $\dfrac{9}{32} \simeq 0,3$, $\dfrac{8}{17} \simeq 0,15$.

Exercice 5 *Suites implicites et monotonie.*
Soit $f : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} \end{array} \right.$. On rappelle que $\lfloor e \rfloor = 2$.

1. Dresser le tableau de variation de f, à compléter à l'aide des limites admises suivantes :
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède exactement deux solutions, notées u_n et v_n de sorte que $u_n < v_n$. Montrer de plus : $u_n < 1 < v_n$.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est croissante, c'est-à-dire :
$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, v_{n+1} \geq v_n.$$
On pourra s'aider d'un argument faisant appel à la monotonie de f.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante, c'est-à-dire :
$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, u_{n+1} \leq u_n.$$

Exercice 6 *Deux courbes dans un même repère.*
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) \;\text{ et }\; g(x) = \frac{2x}{x+2}.$$

On note h la fonction $h = f - g$.

1. Quel est le domaine de définition de h?
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Étudier les variations de h. En déduire :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq g(x).$$
4. Montrer que les courbes représentatives de f et g admettent une tangente commune en 0.
5. Tracer sans justification l'allure de la courbe de la fonction logarithme. Quel est le lien entre cette courbe et celle de f?
6. Tracer dans un même repère les courbes de f et g, ainsi que cette tangente commune.*Ne faites pas ce tracé dans le même repère que celui de la question précédente.*
7. Pour tout réel $\alpha > 0$, on définit la fonction f_α par :
$$f_\alpha(x) = \ln(1+x) - \alpha x.$$
Étudier les variations de la fonction f_1.
8. Montrer que si $\alpha \geq 1$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq \alpha x$.
9. Existe-t-il un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq \alpha x$?

Exercice 7 *Un petit exercice plus théorique.*
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On suppose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x)f(\frac{1}{x}) = 1.$$

1. Montrer que f ne s'annule pas, et que $f(1) \in \{-1, 1\}$.
2. Dans cette question seulement, on suppose f strictement croissante et de signe constant sur $[1, +\infty[$. Montrer que f est strictement croissante sur $]0, 1]$, et de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Dans cette question seulement, on suppose f de signe constant. On suppose en outre $f(1) = -1$, et f minorée par un réel A. Montrer que $\dfrac{1}{A}$ est un majorant de f.
4. Existe-t-il une fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x)h(\frac{1}{x}) = -1$?

— Fin de l'énoncé —