

TD de mathématiques n°8 : Asymptotique des suites

Pour commencer

Calculs de limites de formules explicites

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il y a ou non une forme indéterminée puis déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (toute utilisation d'un théorème de croissance comparée devra être explicitement mentionnée) :

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $n^2 - n - 1$ | 16) $n - \frac{n}{n+1}$ | 29) $\ln(n^2 + 1) - 2 \ln n$ | 42) $e^n - n^e$ |
| 2) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ | 17) $n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$ | 30) $n\sqrt{n} - n - 2\sqrt{n} + 1$ | 43) $e^{n-\ln n}$ |
| 3) $n^3 + 2n^2 + 3n + 4$ | 18) $e^{1+\ln n}$ | 31) $\frac{n^2 - n\sqrt{n}}{n\sqrt{n} - n}$ | 44) $\frac{5^n - 3^n}{2^n - 1}$ |
| 4) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ | 19) $n - \frac{n^2}{n+1}$ | 32) $\ln \left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)$ | 45) $\ln \left(\frac{1}{n} \right) + n$ |
| 5) $n^3 - 2n^2 + 3n + 4$ | 20) $e^{1-\ln n}$ | 33) $3 + 2 \times 3^n$ | 46) $\frac{2^n - 3^n}{2^{-n} + 3^{-n}}$ |
| 6) $n + \sqrt{n^2 + n}$ | 21) $\frac{n^2 - n - 1}{n^2 + n + 1}$ | 34) $3 \times 2^n - 2 \times 3^n$ | 47) $n - \ln(n^2 - 1)$ |
| 7) $n^4 + n^2 - (n^3 + n)$ | 22) $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ | 35) $\sqrt{\left(4 + \frac{1}{n} \right) \left(9 - \frac{1}{n} \right)}$ | 48) $e^{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ |
| 8) $n - \sqrt{n^2 - n}$ | 23) $\frac{-n^3 + n + 1}{n^2 + 1}$ | 36) $2^n - 3^n + 4^n$ | 49) $\frac{2 \times 3^n + 2^n}{5 \times 3^n - 2^n}$ |
| 9) $(1 - n)(n - 1)$ | 24) $\ln \left(\frac{1}{n} \right) - n$ | 37) $\sqrt{1 + \frac{3n+1}{n+1}}$ | 50) $2^n - n^2$ |
| 10) $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$ | 25) $\frac{3n^3 + 2n^2 - 1}{4n^3 - n + 3}$ | 38) $3^n + (-2)^n - 5^n$ | 51) $\frac{e^{2n} - e^n}{e^{2n} + e^n}$ |
| 11) $n(n-1)(n+1) - n^3$ | 26) $\frac{n^2 + 2n + 1}{3n^3 - 5n + 6}$ | 39) $\sqrt{n - \frac{n^2}{n+1}}$ | 52) $e^n - \ln n$ |
| 12) $\frac{n+1}{n}$ | 27) $\ln(n^2 + 1) - \ln n$ | 40) $5 \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{5} \times 2^n$ | 53) $\frac{e^{-n}}{n^e}$ |
| 13) $\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$ | 28) $\frac{(n-1)(n+1)}{(n-2)(n+2)}$ | 41) $5 \times \left(\frac{1}{6} \right)^n + 2 \left(-\frac{1}{3} \right)^n$ | 54) $\frac{e^n}{n^2 + 1}$ |
| 14) $\frac{n}{n+1}$ | | | 55) $\ln(n+1) - n$ |
| 15) $1 - \frac{n}{n+1}$ | | | 56) $e^{-n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ |

Limites et inégalités

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > -a$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. On pourra utiliser un encadrement du logarithme, ou démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\ln(1 + \frac{a}{n})) = a$ en reconnaissant un taux de variation.

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{1}{n} \right)^n$.

Exercice 4 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$ et $v_n = \frac{u_n}{n}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ et $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n + k}}$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$, $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq v_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ et $\sqrt{\frac{n}{2}} \leq w_n$.
- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n + k}$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(1 + x) \leq x \leq -\ln(1 - x)$.
- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 7 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n!}{a^n}$.

- (a) On suppose que $a \leq 1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (b) On suppose que $a > 1$.
 - (i) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
 - (ii) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$.
 - (iii) En déduire que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 2^{n-n_0} u_{n_0}$, puis la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Limites et monotonie

Exercice 8 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Indication : on pourra étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 9 Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + a^k)$.

- (a) Étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
- (b) On suppose que $a = 1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (c) On suppose que $a > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.
- (d) On suppose que $a < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Études de suites récurrentes

Exercice 10 On considère la suite réelle définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n (1 - u_n)$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
- (b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 11 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n (1 + u_n)$$

- (a) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 12 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 1$.
- (b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 13 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq \sqrt{2}$.
- (b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (d) Écrire un code Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (sans utiliser sqrt bien sûr).

Études de suites définies de manière implicite

Exercice 14

- (a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'équation $\sqrt{x^3 + x + 1} = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera u_n dans la suite de l'exercice.
- (b) Montrer que $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq n$.
- (d) Montrer que u n'est pas majorée. En déduire la nature de u .

Exercice 15 Pour tout entier n , on note f_n la fonction polynomiale $x \mapsto x^n + x - 1$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, et que celle-ci appartient à $]0, 1[$. On notera x_n cette solution dans la suite.
- (b) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.
- (c) En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
- (d) Montrer que $(x_n)_n$ converge, et que sa limite l vérifie $0 < l \leq 1$.
- (e) Montrer que : $\forall n > 0, x_n \leq l$.
- (f) Montrer enfin que $l = 1$, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Termes de rangs pairs et impairs

Exercice 16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

- (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Pour continuer

Exercice 17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Exercice 18 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

(a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Culture générale : La limite commune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est appelée constante d'Euler, se note γ et vaut approximativement 0,577.

Exercice 19 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 20 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 21 On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$ et $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^3 - 2}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{(v_n)^3 - 2}{3}$$

(a) (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1, 0]$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 2$.

(b) (i) Factoriser le plus possible le polynôme $P(X) = X^3 - 3X - 2$.

(ii) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(iii) Déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) (i) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dorénavant, on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ii) Déterminer la valeur de ℓ .

(d) (i) Montrer en raisonnant par l'absurde que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

(ii) Proposer un code Python permettant d'afficher la valeur du plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \geq 10^{20}$.

Exercice 22 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 + 2\sqrt{u_n - 3}$.

(a) On suppose que $u_0 = 8$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 7$.

Étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(b) On suppose que $u_0 = 4$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $4 \leq u_n \leq 7$.

Étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 23 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

- (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 24 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

- (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 25 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}} - 1$.

- (a) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ , alors $\ell + 1 = \frac{\ell+1}{\sqrt{\ell^2+1}}$.

En déduire que $\ell \in \{-1, 0\}$.

- (b) On suppose que $u_0 < -1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < -1$.

Montrer ensuite que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- (c) On suppose que $u_0 \in]-1, 0[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-1, 0[$. Montrer ensuite que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- (d) On suppose que $u_0 > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Montrer ensuite que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.