

Programme de colle n° 9 : Ensembles et applications. Asymptotique des suites (début).

Semaine du lundi 24 novembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Applications

9.1 Notion d'application, ensemble B^A des applications de A vers B . Exemples dans de multiples contextes. Application identité Id_E d'un ensemble E .

9.2 Notion d'antécédent. Ensemble image $f(A)$ d'une application $f : A \rightarrow B$. Ensemble image $f(C)$ de C par f , où C est une partie de l'ensemble de départ de f .

9.3 Composée $g \circ f$ d'une application $f : A \rightarrow B$ par une application $g : B \rightarrow C$. Cas particulier des fonctions réelles, qui dérogent à cette définition. Pour toute application $f : A \rightarrow B$, on a $f \circ \text{Id}_A = \text{Id}_B \circ f = f$. Associativité de la composition.

9.4 Notion d'application injective. Méthodes pour démontrer qu'une application est injective. Cas particulier des fonctions réelles : toute fonction réelle strictement monotone est injective.

9.5 Notion d'application surjective, exemples et méthodes.

9.6 Notion d'application bijective. Exemples et méthodes pour déterminer si une application est bijective (montrer l'injectivité et la surjectivité, ou bien étudier directement l'équation " $f(x) = y$ "). Image réciproque $f^{-1}(b)$ d'un élément $b \in B$ par une application bijective $f : A \rightarrow B$. Bijection réciproque d'une application bijective. Soit $f : A \rightarrow B$ une application, si on dispose d'une application $g : B \rightarrow A$ telle que $\forall (b, a) \in B \times A, f(a) = b \iff a = g(b)$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$. Vocabulaire : " f induit une bijection de A' vers B' ".

9.7 Si $f : A \rightarrow B$ est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$, et f^{-1} est également bijective de réciproque f . Caractérisation de la bijectivité de f par composition (prop. 72), exemples.

9.8 La composée de deux applications injectives (resp. surjective, resp. bijective) est injective (resp. surjective, resp. bijective et égalité donnant la réciproque de la composée).

Asymptotique des suites

9.9 Définition de " u converge vers l ", où l est un réel et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Exemples. Équivalences $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \iff u_n - l \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \iff |u_n - l| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Exercice : si une suite u converge vers un réel l et $l > 0$, alors u est strictement positive à partir d'un certain rang. (Avec les ϵ)

9.10 Définition de $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

9.11 Notion de suite convergente, de suite divergente, divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$. Toute suite constante converge vers la valeur de cette constance. Toute suite convergente est bornée. Toute suite qui diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est non bornée (car non majorée, resp. non minorée).

Unicité de la limite (sera démontré lundi).

Python

9.12 Listes : recherche de maximum et variations autour de ce thème (indice de la première occurrence du maximum, nombre d'occurrences du maximum, renvoi des deux plus grandes valeurs, éventuellement égales, de la liste). Exemples de fonctions donnant la liste des termes d'une suite définie par une relation de récurrence (sur 1 ou 2 rangs). Tri par insertion.

Quelques questions de cours

1. Définir les notions d'ensemble image. Déterminer l'ensemble image de $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array} \right.$.
2. Définir la notion d'application injective. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ est-elle injective lorsque $A = \mathbb{R}[X]$? Lorsque A est l'ensemble des polynômes s'annulant en 0 ?
3. Définir la notion d'application surjective. Montrer que $(x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$ est surjective de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, mais que $(x, y) \mapsto (x + y, -x - y)$ ne l'est pas (de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$).
4. Définir la notion d'application bijective. Montrer que $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, 2y + z, 3z)$ est bijective de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.
5. Définir les notions d'image réciproque et d'application réciproque, pour une application bijective. Montrer que $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est bijective de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa réciproque.
6. Énoncer et démontrer la proposition (73) caractérisant la bijectivité d'une application à l'aide de la composition. *On pourra librement utiliser la proposition 72 dans cette démonstration.*
7. Énoncer et démontrer la proposition (77) donnant des résultats d'injectivité, de surjectivité ou de bijectivité pour la composée d'applications ayant cette propriété.
8. Donner la définition de $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, où l est un réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
9. Donner la définition relative aux limites infinies de suites. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors $(u_n)_n$ n'est pas majorée.
10. Montrer que si $(u_n)_n$ est une suite réelle admettant une limite réelle l telle que $l > 0$, alors $(u_n)_n$ est strictement positive à partir d'un certain rang.
11. Montrer que toute suite convergente est bornée.
12. Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée une liste (non vide) de nombres, et renvoyant en sortie un couple donnant le maximum de cette liste et l'indice de sa première occurrence (ou, au choix de l'interrogation, le nombre de ses occurrences - sans utiliser `count`).
13. Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée un entier n et renvoyant en sortie la liste $[u_0, \dots, u_n]$ des termes de la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = u_k^2 + 2k + 1$.