Programme de colle n^o 10 : Asymptotique des suites.

*Semaine du lundi **1 décembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Généralités sur les limites de suites

10.1 Jusqu'au théorème d'unicité de la limite d'une suite : se reporter au programme de colle précédent.

Limites et opérations

10.2 Limites et opérations : limite d'une somme, d'un produit, passage à l'inverse. Limites des suites de la forme $(n^k)_n$, où $k \in \mathbb{Z}$.

10.3 Passage à la limite des inégalités.

10.4 Composition par l'exponentielle, la racine carrée, le logarithme, une fonction puissance généralisée.

10.5 Limites classiques : limites des suites de la forme $(n^\alpha)_n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Limites des suites géométriques.

10.6 Le théorème de croissance comparée, forme avec une suite géométrique.

10.7 Levée des indétermination (principe général) : factoriser une somme par le terme "le plus grand" (au sens des "croissances comparées"), utilisation de la quantité conjuguée.

Théorèmes d'existence de limites

10.8 Théorème des gendarmes. Corollaire (HP) : si $(u_n)_n$ est une suite bornée et si $(v_n)_n$ converge vers 0, alors $(u_n v_n)_n$ converge vers 0.

10.9 Théorème de comparaison.

10.10 Théorème de la limite monotone.

10.11 Théorème des suites adjacentes

10.12 Théorème portant sur les sous-suites des termes de rangs pairs et impairs.

Python

10.13 Utilisation de boucles imbriquées dans des algorithmes sur les listes. Début du TP portant sur `matplotlib`, tracé des termes d'une suites.

Quelques questions de cours

1. Dresser les tableaux donnant les éventuelles limites de la somme et du produit de suites admettant une limite.
2. Énoncer et démontrer le théorème de passage à la limite des inégalités.
3. Énoncer et démontrer la proposition permettant de composer par une fonction puissance généralisée.
4. Énoncer la proposition portant sur les limites des suites géométriques. Démontrer le cas des suites de raisons $q > 1$.
5. Énoncer le théorème de croissance comparée. Étudier la limite de la suite u donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{2^n + 3^n - n}{5^n + \ln(n)}$.
6. Énoncer et démontrer le théorème des gendarmes.
7. Énoncer le théorème de comparaison. L'utiliser pour montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
8. Énoncer le théorème de la limite monotone, le démontrer dans le cas d'une suite croissante majorée.
9. Énoncer le théorème des suites adjacentes. Montrer que les suites u et v définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$ convergent et ont même limite.
10. Énoncer le théorème portant sur les sous suites des termes de rangs pairs et impairs. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_n$ converge.
11. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def Rangs(L):` prenant en entrée une liste $\mathtt{L} = [\mathtt{l}_1, ..., \mathtt{l}_n]$ de nombres et renvoyant en sortie la liste $[\mathtt{m}_1, ..., \mathtt{m}_n]$, où $\mathtt{m}_\mathtt{i}$ est le nombre d'entrées de `L` strictement inférieures à $\mathtt{l}_\mathtt{i}$.
12. Écrire un code Python permettant de tracer les 50 premiers termes de la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = nu_n + 1$.