

Programme de colle n° 11 : Asymptotique des suites, dénombrement.

Semaine du lundi 8 décembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Asymptotique des suites

11.1 Se reporter au programme de colle précédent.

Ensembles finis, dénombrement

11.2 Étude de l'existence d'injections, de surjections et de bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m \rrbracket$.

Résultat admis.

11.3 Notion d'ensembles en bijection, ou équipotents. Ensembles finis. Définition du cardinal d'un ensemble fini. Soit E un ensemble fini et F un ensemble, alors E est en bijection avec F si et seulement si F est fini de cardinal $\text{Card}(E)$.

11.4 Propriétés du cardinal : Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, équivalence " $A = E \iff A \subset E$ et $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ".

Résultat admis.

11.5 Cardinal d'une réunion disjointe.

11.6 Cardinal du complémentaire d'une partie d'un ensemble fini. Cardinal d'une réunion d'ensembles finis deux à deux disjoints. Cardinal d'une réunion de deux ou de trois (formule du Crible) parties d'un ensemble fini.

11.7 Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis.

11.8 Exemples type de dénombrements.

11.9 Notion d'arbre binaire, tout arbre binaire de hauteur n possède 2^n feuilles. Chemins d'un arbre binaire. Correspondance entre chemins et feuilles: tout arbre binaire admet 2^n chemins. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Partie formellement admise, explications peu formalisées à comprendre.

11.10 Factorielle d'un entier. Si E et F sont deux ensembles finis de cardinal n , alors il y a $n!$ bijections de E vers F . Ensemble des permutations d'un ensemble fini.

11.11 Coefficients binomiaux : Définition $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble de cardinal n , symétrie des coefficients binomiaux. Formule du triangle de Pascal, triangle de Pascal. Formule donnant $\binom{n}{k}$ à l'aide de factorielles. Formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

11.12 Formule du binôme de Newton, exemples d'utilisations.

Python

11.13 Se reporter au programme de colle précédent. Suite du TP Matplotlib

Quelques questions de cours

1. Définir la notion d'ensemble fini. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant le cardinal d'un ensemble fini.
2. Énoncer les propositions relatives au cardinal d'une réunion disjointe et du complémentaire de deux (resp. d'une) parties d'un ensemble fini. Démontrer la proposition relative au complémentaire.
3. Énoncer et démontrer la proposition relative au cardinal d'une réunion de parties deux à deux disjointes A_1, \dots, A_n d'un ensemble fini.
4. Énoncer et démontrer la proposition donnant le cardinal d'une réunion non nécessairement disjointe.
5. Énoncer la proposition relative au cardinal d'un produit cartésien (fini) d'ensembles finis. Démontrer le premier point.
6. Définir la notion de permutation d'un ensemble. Donner la proposition donnant le nombre de permutations d'un ensemble fini E . Démontrer que si E et F sont deux ensembles finis de même cardinal, alors toute injection de E vers F est une bijection.
7. Définir la notion de coefficient binomial. Énoncer et démontrer la proposition (37) donnant la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.
8. Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal.
9. Énoncer et démontrer la formule donnant les coefficients binomiaux en termes de factorielles.
10. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton. *Calculs avec points de suspensions autorisés.*
11. Écrire un code Python pour définir la factorielle d'un entier naturel n .