Chapitre 9 : Ensembles finis, dénombrement

ECG1 A 2025-2026, Lycée Hoche

Table des matières

Dénombrer, c'est compter le nombre de possibilités d'un phénomène. Par exemple, on peut compter

- Le nombre de lancers différents d'une paire de dés à 6 faces dont la somme fait 7,
- Le nombre de mains de 5 cartes (dans un jeu classique de 52) formant un carré,
- Le nombre d'anagrammes du mot "CLASSIQUE".

Pour cela, on s'appuie sur la théorie des ensembles finis.

I. Ensembles finis

1. Injections, surjections et bijections entre $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,m]\!]$

On admet le fait suivant :

Proposition 1. *Soient n et m deux entiers naturel.*

(i) Il existe une injection $f : [\![1,n]\!] \mapsto [\![1,m]\!]$ si et seulement si $n \leq m$.

(ii) Il existe une surjection $f : [\![1,n]\!] \mapsto [\![1,m]\!]$ si et seulement si $n \geq m$.

(iii) Il existe une bijection $f : [\![1,n]\!] \mapsto [\![1,m]\!]$ si et seulement si $n = m$.

Remarque. Ce fait se démontre par récurrence, c'est un peu long et très formel.

Remarque. Lemme des tiroirs : à noter.

On utilise beaucoup, dans la théorie des ensembles finis, la notion de bijection.

Définition 2. On dit que deux ensembles E et F ***sont en bijection***, ou ***sont équipotents***, s'il existe une bijection de E vers F.

Exemple 3.
- $[\![1,6]\!]$ et $[\![2,7]\!]$ sont en bijection car l'application $\left|\begin{array}{ccc} [\![1,6]\!] & \longrightarrow & [\![2,7]\!] \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}\right.$ est bijective.
- Tout ensemble E est en bijection avec lui même, car $\mathrm{Id}_E : E \to E$ est bijective.
- $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection car $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective.
- Explication à noter : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont en bijection.
- Exercice facultatif : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection (on pourra utiliser la parité des éléments de $\mathbb{N}$).
- Culture générale : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas en bijection ("il y a beaucoup plus d'éléments dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{N}$"). Ceci se démontre avec un argument appelé ***l'argument diagonal de Cantor***.

Remarque. S'il existe une bijection $f : E \to F$, alors $f^{-1} : F \to E$ est bijective. Donc la condition "il existe une bijection de E vers F" est équivalente à la condition "il existe une bijection de F vers E" : E et F jouent des rôles symétriques dans la définition précédente, comme le laisse sous-entendre la terminologie.

2. Ensembles finis, cardinal

La définition suivante caractérise un ensemble fini comme un ensemble dont on peut énumérer ses éléments à l'aide d'un nombre fini d'entiers.

Définition 4. Soit E un ensemble.
On dit que E est un ensemble fini s'il existe un entier naturel n tel que : E et $[\![1,n]\!]$ sont en bijection.

Exemple 5. (*i*) $\emptyset$ est un ensemble fini, car il est en bijection avec $[\![1,0]\!]=\emptyset$.

(*ii*) $E=\{2,e,\pi\}$ est un ensemble fini, car il est en bijection avec $[\![1,3]\!]$ via l'application $f:[\![1,3]\!]\to E$ dont la table des valeurs est :

x	1	2	3
$f(x)$	2	e	π

f ***énumère*** les éléments de E, en disant que 2 est "le premier" élément de E, e "le second" et π "le troisième".
Une autre bijection entre ces ensembles est donnée par $g:[\![1,3]\!]\to E$ dont la table des valeurs est :

x	1	2	3
$g(x)$	π	2	e

(*iii*) On verra que si E est un ensemble fini contenant exactement n éléments, alors il y a exactement $n!$ applications bijectives de $[\![1,n]\!]$ vers E.

Remarque. Bien sûr, un ensemble fini n'est rien d'autre qu'un ensemble ayant un nombre fini d'éléments. Son nombre d'éléments est appelé **son cardinal**.

Définition 6. (et proposition.) Soit E un ensemble fini.
Alors, il existe un unique entier naturel n tel que : E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$.
Cet entier est appelé le ***cardinal*** de E, et est noté $\mathrm{Card}(E)$.

Démonstration. À noter. □

Voici un premier exemple, à ne pas oublier :

Proposition 7. *Soient n et p deux entiers tels que $p\leq n$. Alors, $[\![p,n]\!]$ est fini et :*

$$\mathrm{Card}\left([\![p,n]\!]\right)=n-p+1.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Ce formalisme utilisant la notion de bijection permet de démontrer les premiers résultats sur le cardinal. Une définition alternative, si vous préférez :

Définition 8. On dit qu'un ensemble E est ***fini*** s'il contient un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, on appelle ***cardinal*** de E, et on note $\mathrm{Card}(E)$, le nombre d'éléments qu'il contient.

Remarque. On trouve aussi parfois la notation $|E|=\mathrm{Card}(E)$.

Exemple 9. (*i*) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont infinis (ce ne sont pas des ensembles finis).

(*ii*) L'ensemble $E=\{1,2,3,5,7\}$ est fini, et $\mathrm{Card}(E)=5$.

(*iii*) Les répétitions d'éléments, dans une description en extension, n'apportent rien :

$$\mathrm{Card}(\{1,2,3,4,3,4\})=4.$$

En effet, $\{1,2,3,4,3,4\}=[\![1,4]\!]$.

Remarque. Comme le montre l'exemple ci-dessus, il faut faire attention. Si $x_1, \dots, x_n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) sont des éléments d'un ensemble E tel que :

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

alors E n'est pas automatiquement de cardinal n. Il faut pour cela que les x_i soient deux à deux distincts. Autrement dit, les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\text{Card}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = n$

(*ii*) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j$.

Enfin, **le principe suivant est essentiel en dénombrement.** Il est utilisé en permanence dans les démonstrations.

Proposition 10. *Soient E et F deux ensembles. On suppose que E est fini. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) Il existe une bijection $E \to F$, et

(ii) F est fini, et $\text{Card}(F) = \text{Card}(E)$.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.
On se sert de ce principe tout le temps en dénombrement, souvent sans même le mentionner. Et c'est le point clé d'exercices plus abstraits.
Par exemple, considérons un jeu de cartes classique avec 52 cartes. Lorsqu'on dit la phrase suivante,

> «Il y a autant de mains de 5 cartes contenant un carré d'As que de manières de choisir la carte qui n'est pas un As. Il y a donc 52-4=48 mains de 5 cartes contenant un carré d'As.»

on sous-entend que l'application qui, à une main de 5 cartes contenant un carré d'As associe la carte qui n'est pas un As, est bijective, et on applique ce principe.

3. Propriétés du Cardinal

Voici les premières propriétés du cardinal.

a) Inclusion

Proposition 11. *Soit E un ensemble fini. Alors :*

(i) Toute partie A de E est finie et vérifie $\text{Card}(A) \leq Card(E)$.

(ii) Pour tout ensemble A:

$$\begin{cases} A \subset E \\ \text{Card}(A) = \text{Card}(E) \end{cases} \iff A = E.$$

Démonstration. Admise, le sens est intuitif. □

Remarque. Le point (*ii*) de la proposition ci-dessus donne une autre manière de démontrer une égalité d'ensembles $A = E$ lorsque E est un ensemble fini. Il suffit de montrer que A est une partie de E, puis $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$. Autrement dit, le test de cardinal peut remplacer la vérification de l'autre inclusion à considérer pour montrer $A = E$.

b) Réunion disjointe

Définition 12. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On dit que A et B sont des ensembles ***disjoints*** si $A \cap B = \emptyset$.
Dans ce cas, on dit aussi que la réunion $A \cup B$ est une réunion ***disjointe***.

Proposition 13. *Soit E un ensemble fini. Soient A et B deux parties de E.*
Si A et B sont disjoints, alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Autrement dit, le cardinal d'une réunion disjointe d'ensembles finis est la somme de leurs cardinaux.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Il est clairement nécessaire que la réunion soit disjointe. Par exemple, si on prends $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors $a \cup B = \{1, 2, 3\}$ est de cardinal 3, mais A et B sont de cardinal 2. L'égalité

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

est donc fausse dans ce cas.

c) Passage au complémentaire

Proposition 14. *Soit E un ensemble fini.*
Pour toute partie A de E :

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.
On se sert souvent de cette proposition en dénombrement. On dit qu'on raisonne **par passage au complémentaire**.
Par exemple, on lance successivement deux dés classiques à 6 faces, et on cherche le nombre de résultats possibles pour lesquels les dés ne tombent pas sur la même face.
Soit $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ l'ensemble des résultats possibles pour ce tirage de 2 dés.
Notons $B \subset \Omega$ l'ensemble des résultats n'amenant pas deux fois la même face.
Il y a 6 résultats possibles pour lesquels les dés font la même face $((1, 1), ..., (6, 6))$ donc $\text{Card}(\bar{B}) = 6$.
Par passage au complémentaire :

$$\text{Card}(B) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\bar{B}) = 36 - 6 = 30.$$

d) Réunion disjointe de plus de 2 parties

Proposition 15. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble fini E (où $n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que ces parties sont deux à deux disjointes :*

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Alors,

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_n).$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.
Pour dénombrer un ensemble de possibilités, on peut les classer dans des sous-cas ***disjoints***, calculer le cardinal de ces sous-cas, puis les sommer.

Exemple 16. On lance successivement deux dés à 6 faces classiques, et on note dans l'ordre les résultats obtenus. Quel est le nombre de résultats possibles comportant exactement une fois la face 1?

Rédaction attendue :
Soit C l'ensemble des résultats comportant exactement une face 1.
Pour construire un élément de C, il y a deux possibilités **disjointes**:
1e cas : Le premier dé fait 1. Dans ce cas, le second dé a 5 valeurs possibles, de 2 à 6. Il y a donc 5 résultats possibles dans ce cas.
2e cas : Sinon, le second dé fait 1. Dans ce cas, le premier dé a également 5 valeurs possibles, et il y a donc 5 résultats possibles dans ce cas.
Les deux possibilités sont bien disjointes, car les résultats de C comportent exactement une face 1, donc :

$$\mathrm{Card}(C) = 5 + 5 = 10.$$

Il y a 10 résultats comportant exactement une fois la face 1.
Rédaction plus théorique :
On cherche donc le cardinal de l'ensemble C des paires $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$ contenant exactement une coordonnée égale à 1.
Notons $C_1 = \{1\} \times [\![2, 6]\!]$ et $C_2 = [\![2, 6]\!] \times \{1\}$.
Alors, $C = C_1 \cup C_2$ et cette réunion est disjointe (1), donc par théorème :

$$\mathrm{Card}(C) = \mathrm{Card}(C_1) + \mathrm{Card}(C_2).$$

De plus, l'application suivante est bijective :

$$\left| \begin{array}{ccc} C_1 & \longrightarrow & [\![2, 6]\!] \\ (i, j) & \longmapsto & j \end{array} \right.$$

donc $\mathrm{Card}(C_1) = \mathrm{Card}([\![2, 6]\!] = 5$. De même, $\mathrm{Card}(C_2) = 5$ et finalement :

$$\mathrm{Card}(C) = 10.$$

(1) : Soit $x \in C_1$, soit $j \in [\![2, 6]\!]$ tel que $x = (1, j)$. Si on avait $x \in C_2$, on aurait $1 \in [\![2, 6]\!]$ ce qui est absurde. Donc $x \notin C_2$. Ceci montre $C_1 \subset \bar{C}_2$, donc $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Exercice 17. On lance successivement deux dés à 6 faces et on note, dans l'ordre, les résultats obtenus.

Combien de résultats ont un premier dé ayant une face Paire et un second dé ayant une face inférieure ou égale à celle du premier dé ?

4. Cardinal et réunions

Pour les réunions non disjointes, le tableau est plus compliqué.

Exercice 18. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Posons $A' = A \cap \bar{B}$ et $B' = B \cap \bar{A}$.

(*i*) Représenter ces ensembles sur un dessin.

(*ii*) Montrer que A', B' et $A \cap B$ sont deux à deux disjoints et que:

$$\begin{cases} A = A' \cup (A \cap B) \\ B = B' \cup (A \cap B) \end{cases}.$$

Proposition 19. *Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors,*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Démonstration. À noter. □

Exercice 20. Chaque élève d'un groupe de 12 élèves doit choisir au moins une langue entre le Corse et le Breton. 7 élèves ont choisi le Corse, et 4 ont choisi à la fois le Corse et le Breton. Combien d'élèves ont choisi le Breton ?

On peut itérer l'application de cette formule pour en déduire des formules avec une réunion de plus de deux ensembles.

Proposition 21. (Formule dite "du Crible") *Soient A, B et C trois parties d'un ensemble fini E. Alors,*

$$\begin{aligned} Card(A \cup B \cup C) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) \\ &\quad - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) \\ &\quad + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Démonstration. À noter. □

5. Cardinal et produit cartésien

Proposition 22. *(i) Soient E et F deux ensembles finis. Alors, $E \times F$ est fini, et*

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \cdot \mathrm{Card}(F).$$

(ii) Soient $E_1, \dots E_n$ des ensembles finis (où $n \in \mathbb{N}^*$). Alors, $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est fini, et :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(E_k).$$

(iii) En particulier, pour tout ensemble fini E et pour tout entier $n \geq 1$, E^n est fini et :

$$\mathrm{Card}(E^n) = \mathrm{Card}(E)^n.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Le premier point est très clair sur un dessin ! Les autres ne sont qu'une conséquence.

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.
Cette proposition est très utile en dénombrement. Elle nous sert à appréhender les situations où les objets à dénombrer s'obtiennent par choix successifs. Voici un exemple.
On lance deux dés à 6 faces classiques, et on note, dans l'ordre, les résultats obtenus. Dénombrons (à nouveau) le nombre de résultats possibles n'amenant pas deux fois la même face.
Pour construire un tel résultat, on raisonne par ***choix successifs :***

- Il y a 6 manières de choisir le résultat du premier dé.
- Une fois ce résultat choisi, il y a 5 manières de choisir le résultat du second dé pour qu'il soit différent du premier choix.

Par principe multiplicatif, il y a donc $6 \times 5 = 30$ tels résultats.

6. Exemples type de dénombrement

On a vu jusqu'ici trois principes, en plus du principe de bijectivité :

- Le passage au complémentaire,
- L'utilisation de cas disjoints,
- Le raisonnement par choix successifs.

Ajoutons à cela la proposition portant sur le cardinal d'une réunion, et vous avez le ciment de tous nos dénombrement.

Exemple 23. On lance deux dés à 6 faces, et on note les faces obtenus dans l'ordre. Quel est le nombre de résultats comportant au moins une fois la face 1? (2 méthodes).

Exemple 24. On tire deux cartes dans un jeu classique de 52 cartes, et on regarde la main obtenue (sans prendre en compte l'ordre du tirage). Quel est le nombre de mains comportant exactement une carte coeur?

Exemple 25. On lance successivement deux dés à 6 faces, et on note dans l'ordre les résultats obtenus. Combien de résultats pour lesquels les deux faces ont la même parité peut-on obtenir? (2 méthodes).

II. Parties d'un ensemble, permutations

1. Arbres binaires

Exemple 26. Dessin à noter!

Pour passer d'un arbre binaire de hauteur n à un arbre binaire de hauteur $n+1$, on ajoute deux branches à chaque feuille, et on multiplie ainsi le nombre de feuilles par deux. D'où la proposition :

Proposition 27. *Un arbre binaire de hauteur n possède 2^n feuilles.*

(Définition :) On appelle ***chemin*** d'un arbre binaire toute suite de branches successivement adjacentes reliant la racine à une feuille.

Exemple 28. Dessin à noter.

Remarque. Un chemin est exactement déterminé par sa feuille d'arrivée. Conséquence :

Proposition 29. *Tout arbre binaire de hauteur n admet 2^n chemins.*

Remarque. On peut aussi voir les choses comme ça, mais c'est moins élégant. Pour construire un chemin dans un arbre binaire de hauteur n, on doit faire n choix successifs. Partant de l'origine, on a successivement le choix parmi les deux branches que l'on peut emprunter. Il y a n de ces choix, et chaque choix comporte deux possibilités. Par principe multiplicatif, il y a donc $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ tels choix.

Cela permet de voir la proposition fondamentale suivante.

Proposition 30. *Soit E un ensemble fini. Alors, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini, et*

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Démonstration. À noter. □

2. Factorielle

Rappel : On note $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et par convention :

$$0! = 1.$$

Exemple 31. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) Simplifions $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

(ii) Simplifions $\dfrac{n}{n!}$.

Remarque. Attention, l'opération de factorielle est prioritaire sur les produits. Par exemple, $2\times 3! = 2\times(3!)$. Idem, $n+1! = n+1$ (ce qui n'est pas, à priori, $(n+1)!$.

Remarque. Vous devez savoir coder la factorielle en Python (il n'y a pas de telle fonction au programme). Voici un code :

```
def Factorielle(n):
        P=1
        for i in range(1,n+1):
                P=P*i
        return(P)
```

D'un point de vue combinatoire, voici le sens de la factorielle.

Proposition 32. *Soient E et F deux ensembles finis, de même cardinal $n \in \mathbb{N}$. Alors, il y a exactement $n!$ bijections de E vers F.*

Démonstration. À noter. □

Définition 33. (et proposition) Soit E un ensemble fini. Posons $n = \text{Card}(E)$. On appelle ensemble des permutations de E, et on note $S(E)$, l'ensemble des bijections de E vers E. Alors,

$$\text{Card}(S(E)) = n!.$$

Remarque. C'est une conséquence de la proposition précédente.

Exemple 34. Listons les permutations de l'ensemble $\{1,2\}$, puis de $\{1,2,3\}$.

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.
On se sert très souvent de ce principe pour dénombrer des objets obtenues à partir de permutations.
Par exemple, dénombrons le nombre d'anagrammes du mot "ECG1A".
Ces lettres étant deux à deux distinctes, un tel anagramme est déterminé de manière unique par la donnée d'une permutation des 5 places de ces lettres.
Il y a $5! = 120$ telles permutations, donc il y a 120 anagrammes du mot "ECG1A".

III. Coefficients binomiaux

1. Définition

Si E est un ensemble fini, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini, d'après une proposition précédente. Par conséquent, l'ensemble $P_k(E)$ des parties de E de cardinal k est un ensemble fini. Il admet donc un cardinal.

De plus, on peut montrer que si E et F sont deux ensembles finis de même cardinal, alors ils ont autant de parties comportant k éléments : $\mathcal{P}_k(E)$ et $\mathcal{P}_k(F)$ sont de même cardinal.

Pour démontrer cela, on utilise le principe de bijectivité.

Définition 35. (Et proposition) Soient n et k deux entiers naturels. On appelle coefficient binomial k parmi n, et on note $\binom{n}{k}$, le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble de cardinal n. Cet entier est bien défini (ce nombre ne dépend pas de l'ensemble de cardinal n choisi).

Démonstration. Admise. Dessin à noter. $\square$

Exemple 36. (i) $\binom{5}{1} =$

(ii) $\binom{3}{2} = \dots$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \dots$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{n} = \dots$

(v) $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{1} = \dots$

(vi) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p > n, \binom{n}{p} = \dots$

Proposition 37. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et $p \in [\![0, n]\!]$. Alors :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. Il faut retenir que cette proposition exprime un passage au complémentaire : une partie à p éléments est entièrement déterminée par sa partie complémentaire, de cardinal $n - p$.

Exemple 38. On lance n fois une pièce à pile ou face, et on note dans l'ordre les résultats obtenus. Combien de résultats comportent exactement p fois la face pile?

Exemple 39. On peut aussi voir ça sur un arbre binaire. Cela se généralise à toute suite d'expériences n'ayant chacune que deux résultats possibles (succès ou échec).

Exemple 40. Combien de mains à 5 cartes (d'un jeu de 52 cartes) contiennent exactement 2 cartes coeur?

2. La formule du triangle de Pascal

Proposition 41. (Formule du triangle de Pascal) *Soient n et p deux entiers naturels. Alors :*

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Démonstration. À noter. $\square$

Exemple 42. Intérêt n°1 : Dresser le ***triangle de Pascal*** pour calculer ces coefficients $\binom{n}{k}$ sur des petites valeurs de n (à noter).

Exemple 43. Intérêt n°2 : Démontrer la formule ci-dessous :

Proposition 44. *Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Alors :*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration. À noter. $\square$

Au passage, cela permet de démontrer la formule suivante à connaitre :

Proposition 45. *Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 1$. Alors :*

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration. À noter. $\square$

3. La formule du binôme de Newton

Remarque. La formule ci-dessous se retrouve en imaginant le développement de $(a+b)^n$ à partir de :

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

(à noter).

Proposition 46. (Formule du binôme de Newton) *Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 47. Calculons les sommes suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Interprétation combinatoire à noter.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, puis $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$

Exemple 48. Développer $(1+X)^6$.