

TD de mathématiques n°9 : Dénombrement

Pour commencer

Dénombrement général

Exercice 1 On lance trois fois successivement un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note dans l'ordre les chiffres obtenus.

- (a) Écrire mathématiquement l'ensemble Ω des résultats possibles et déterminer $\text{Card}(\Omega)$.
- (b) On considère le sous-ensemble $D \subset \Omega$ formé des résultats pour lesquels au moins l'un des trois chiffres obtenus est égal à 1. Déterminer $\text{Card}(D)$ en proposant deux argumentations différentes.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble fini et A_1, \dots, A_n des sous-ensembles de E .

Montrer que $\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_n)$.

Exercice 3 On lance trois fois de suite un dé à 6 faces et on note, dans l'ordre, les chiffres obtenus. On note Ω l'ensemble des résultats obtenus.

- (a) Décrire Ω mathématiquement et déterminer $\text{Card}(\Omega)$.
- (b) Combien d'éléments de Ω comportent 3 chiffres distincts?
- (c) Combien d'éléments de Ω comportent 3 chiffres identiques?
- (d) Combien d'éléments de Ω comportent 2 chiffres identiques, mais pas 3 chiffres identiques?

Exercice 4 Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On tire successivement et sans remise deux jetons dans ce sac pour former un nombre : le premier jeton tiré donne le chiffre des dizaines et le second jeton tiré donne le chiffre des unités.

- (a) Combien de nombres différents peut-on obtenir?
- (b) Combien de nombres pairs différents peut-on obtenir?

Exercice 5 On considère 3 urnes U_1, U_2 et U_3 et n boules numérotées de 1 à n .

- (a) De combien de manières peut-on ranger les n boules dans les 3 urnes?
- (b) Combien existe-t-il de rangements pour lesquels l'urne U_1 est vide?
- (c) Combien existe-t-il de rangements pour lesquels au moins une urne est vide?
- (d) Combien existe-t-il de rangements pour lesquels aucune urne n'est vide?

Exercice 6 Déterminer, en justifiant, le nombre d'anagrammes des mots "PYTHON", "MATHÉMATIQUES" et "ABRACADABRA".

Exercice 7 Une urne contient 3 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement une à une et sans remise toutes les boules de cette urne et on note dans l'ordre les couleurs des boules obtenues.

- (a) Combien existe-t-il de résultats?
- (b) Parmi ces résultats, combien commencent par la couleur noire? Combien terminent par la couleur noire?
- (c) Pour chaque valeur de k comprise entre 3 et 6, déterminer le nombre de résultats pour lesquels la dernière boule noire est obtenue au tirage numéro k .
- (d) On suppose maintenant que l'urne contient n boules rouges et n boules noires et on considère un nombre entier $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$. Déterminer le nombre total de résultats, puis le nombre de résultats pour lesquels la dernière boule noire est obtenue au tirage numéro k .

Exercice 8 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \llbracket 0, p \rrbracket$. On dispose de p boîtes numérotées de 1 à p , et de p boules dont n sont blanches et les autres sont noires. De combien de manières peut-on ranger les p boules dans les p boîtes, en rangeant une unique boule par boîte?

En déduire le nombre de p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \{0, 1\}^n$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$.

Exercice 9 On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

- (a) sans imposer de contraintes sur les cartes ?
- (b) contenant 5 carreaux ou 5 piques ?
- (c) contenant 2 carreaux et 3 piques ?
- (d) contenant au moins un roi ?
- (e) contenant au plus un roi ?
- (f) contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques ?

Coefficients binomiaux

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer explicitement $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k$ en fonction de n .

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2}$.

On donnera la réponse sous forme d'un coefficient binomial.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer explicitement en fonction de n les sommes ci-dessous :

$$(a) S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad (b) T_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \quad (c) U_n = \sum_{k=0}^n k (-1)^k \binom{n}{k}$$

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer explicitement en fonction de n les sommes ci-dessous :

$$(a) S_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad (b) T_n(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer un coefficient binomial C tel que $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)C$.
- (b) Calculer $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$. Indication : $k^2 = k(k-1+1)$.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$. Indication : on pourra s'intéresser à $(k+1) \binom{n+1}{k+1}$.

Exercice 16 Soit $p \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer explicitement en fonction de n :

$$(a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (b) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (c) \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice 17 Soient $k, p \in \mathbb{N}$ tels que $k \geq p+1$.

- (a) Montrer que $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ (Formule de Pascal généralisée).
- (c) Interpréter cette formule à l'aide du triangle de Pascal.

Pour continuer

Exercice 18 Soit Ω l'ensemble des nombres de quatre chiffres n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6, les répétitions étant autorisées.

- (a) Déterminer $\text{Card}(\Omega)$.
- (b) Combien d'éléments de Ω peut-on écrire sans répétitions de chiffres?
- (c) Combien d'éléments de Ω contiennent exactement 3 fois le chiffre 1 ?
- (d) Combien d'éléments de Ω contiennent exactement 2 fois le chiffre 1 ?
- (e) Combien d'éléments de Ω contiennent exactement 2 fois le chiffre 1 et 3 chiffres distincts en tout?

Exercice 19 Déterminer le nombre de dominos distincts que l'on peut fabriquer en numérotant leurs cases avec les nombres entiers naturels de 0 à 6. Même question en numérotant de 0 à n .

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

On dispose de p boîtes numérotées de 1 à p et de n boules blanches toutes identiques. De combien de manières peut-on ranger les n boules dans les p boîtes (on peut laisser des boîtes vides)?

En déduire le nombre de p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$.

Exercice 21 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(X) = (1 + X)^n$.

- (a) Déterminer de deux manières le coefficient de X^n dans le polynôme $(P(X))^2$.
- (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ ainsi que de $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}^2$.

Exercice 22 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- (a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \binom{p}{k}$.
- (b) En déduire la valeur de $S = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$ en fonction de n et p .
- (c) En déduire également la valeur de $T = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$ en fonction de n et p .