TD de mathématiques n°10 : Limites de fonctions, continuité (premier volet)

Exercices

Calculs de limites

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$, puis déterminer, si elles existent, les éventuelles limites à toutes les extrémités du domaine de définition.

- (a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$
- (b) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
- (c) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$
- (d) $f(x) = \frac{x\ln x}{x+\sqrt{x}}$
- (e) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$
- (f) $f(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$
- (g) $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$
- (h) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
- (i) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
- (j) $f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$
- (k) $f(x) = \ln(1+e^x) - x$
- (l) $f(x) = \ln(1+e^{-x})$
- (m) $f(x) = \sqrt{x^2-x+1} - x$
- (n) $f(x) = e^x\ln(1+e^{-x})$
- (o) $f(x) = \ln(x+e^{-x})$
- (p) $f(x) = \ln\left(x^2-5x+6\right)$
- (q) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
- (r) $f(x) = \ln\left(\left|x^2-3x+2\right|\right)$
- (s) $f(x) = \frac{\ln x}{1+x\ln x}$
- (t) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$
- (u) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
- (v) $f(x) = \ln(e^x-x-1)$
- (w) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
- (x) $f(x) = \ln(|e^x-e^{-x}|)$
- (y) $f(x) = \frac{\ln x+x-1}{x+e^{-x}}$
- (z) $f(x) = x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$

Continuité

Exercice 2 La fonction

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 La fonction

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x \text{ si } x < 0 \\ 1+x \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 La fonction

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) \text{ si } x \geq 1 \\ x \text{ si } x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 La fonction

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) \text{ si } x \geq 1 \\ x-1 \text{ si } x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6 Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2 \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Soit I un intervalle et $k > 0$ un réel. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Montrer que f est continue sur I.

Exercice 8 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

(a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$, puis montrer que f' est prolongeable par continuité en 0 .

Exercice 9 La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^x$ est prolongeable par continuité en 0 . Quelle convention calculatoire ce résultat permet-il de justifier?

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On suppose f continue sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$.

Peut-on affaiblir l'hypothèse faite sur la continuité de f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12 *Une équation fonctionnelle* On cherche à déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - f(x) = x.$$

(a) Soit f une telle fonction. Montrer que pour tout réel x et pour tout entier $n \geq 1$:

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}.$$

(b) Répondre au problème posé. Quelle hypothèse peut-on affaiblir en gardant la même conclusion ?

Recherche d'asymptotes

Exercice 13 Déterminer les éventuelles asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{3x+2}{7x-5}$

(b) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{3(x+1)}$

(c) $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

(d) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

(f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$

(g) $f(x) = x \ln(1 + e^{-x})$

(h) $f(x) = \frac{x^2+e^x}{x+1}$

(i) $f(x) = x + \ln(2 + e^x)$