Programme de colle n^o 12 : Dénombrement et début des limites de fonctions.

*Semaine du lundi **15 décembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Dénombrement : chapitre complet

12.1 Se reporter au programme de colle précédent.

Limites de fonctions, premier volet sur la continuité

12.2 Adhérence d'un intervalle.

L'adhérence $\bar{I}$ d'un intervalle I est défini comme la réunion de I et de ses bornes finies. Aucune question théorique n'est attendue sur cette notion.

12.3 Limite finie d'une fonction définie sur un intervalle I en un point $x_0 \in \bar{I}$. Si une fonction f définie en un point x_0 admet une limite finie l en x_0, alors $l = f(x_0)$ et on dit que f est continue en x_0. Limite infinie en un point.

12.4 Extension des notions de limites en x_0 au cas d'une fonction définie sur un intervalle épointé de x_0. Limite à droite, limite à gauche en un point. Lien entre limite et limites à droites et à gauche. Prolongement par continuité d'une fonction. Exemple : prolongement par continuité en 0 des fonctions de la forme $x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha > 0$ n'est pas entier.

12.5 Voisinage de $-\infty$, de $+\infty$. Limites en $-\infty$, en $+\infty$ d'une fonction réelle.

12.6 Voisinage d'un point, voisinage à droite ou à gauche (épointé) d'un point, voisinage de $-\infty$, de $+\infty$. Fait : si deux fonctions f et g coïncident sur un voisinage de x_0 (pouvant désigner un réel, une limite à droite ou à gauche, ou un infini), alors dès que ça fait sens :

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l \iff g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$$

12.7 Unicité de la limite, notation lim. Passage à la limite des inégalités.

Limites et calculs

12.8 Sommes, produits de limites. Les fonctions polynomiales sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

12.9 Limites nulles par valeurs positives, par valeurs négatives. Limites et passage à l'inverse.

12.10 Composition de limites. Continuité et autres limites des fonctions usuelles.

12.11 Levée des formes indéterminées : croissance comparée dans le cadre des fonctions réelles. Limites par taux d'accroissement de l'exponentielle (en 0) et du logarithme (en 1).

12.12 Composition d'une suite par une fonction.

Théorèmes d'existence de limites

12.13 Le théorème des gendarmes. Le théorème de comparaison. Le théorème de la limite monotone.

Continuité sur un intervalle

12.14 Tout intervalle ouvert est voisinage de chacun de ses points. Si deux fonctions f et g coïncident sur un intervalle ouvert I, alors f est continue sur I si et seulement si g l'est. Application à l'étude de la continuité de fonctions définies par morceaux.

Asymptotes des fonctions réelles

12.15 Asymptote verticale, asymptote horizontale à la courbe d'une fonction réelle.

12.16 Asymptote oblique à la courbe d'une fonction réelle : définition, proposition donnant une méthode pour étudier l'existence d'une asymptote oblique.

Python (Ne pas demander de code sur l'approximation numérique, seulement l'idée des méthodes)

12.17 Approximations numériques de solutions d'équations : recherche par balayage, recherche par dichotomie.

Quelques questions de cours

1. Énoncer et démontrer la proposition et définition (7) définissant la notion de fonction continue en un point.
2. Montrer que $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$.
3. Montrer que toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Donner toutes les limites des fonctions de la forme $x \mapsto x^\alpha$, d'abord pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, puis pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ en démontrant ce second point.
5. Énoncer le théorème de croissance comparée pour les fonctions réelles. Déterminer la limite de la suite $(e^{\sqrt{n}}/n^2)_n$.
6. Énoncer et démontrer la proposition donnant $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
   Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto (1 + 1/x)^x$.
7. Énoncer le théorème des gendarmes (pour les fonctions réelles).
8. Énoncer le théorème de comparaison (pour les fonctions réelles).
9. Énoncer le théorème de la limite monotone (pour les fonctions réelles).
10. Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2x} \text{ si } x < -1 \\ \frac{1}{2} \text{ sinon} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
11. Écrire un code Python permettant de tracer sur un même graphique les 50 premiers termes des suites u et v définies explicitement de la manière suivante : (au choix de l'interrogateur·trice). On mettra une légende permettant de différencier ces tracés.
12. Écrire un code Python permettant de tracer les 50 premiers termes de la suite définie par récurrence de la manière suivante (au choix de l'interrogateur·trice, relation de récurrence d'ordre au plus 2).
13. Écrire un code Python permettant de tracer le graphe de la fonction suivante sur le segment suivant (au choix de l'interrogateur·trice).

BONNES VACANCES
&
JOYEUSES FÊTES !