Programme de colle n^o 13 : Limites de fonctions et début des espaces probabilisés finis.

*Semaine du lundi **5 janvier**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Limites de fonctions, chapitre complet

13.1 Se reporter au programme précédent

Espaces probabilisés finis

13.2 Expérience aléatoire, univers, événement, événements élémentaires, issues. Exemples.

13.3 Espace probabilisable fini : définition et vocabulaire.

13.4 Opérations sur les événements : vocabulaire probabiliste et opérations ensemblistes.

13.5 Système complet d'événements. Notion de réunion disjointe. Pour tout système complet d'événements $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ et pour tout événement B, on a $B = \bigcup\limits_{i=1}^{m}(B\cap A_i)$ et cette réunion est disjointe.

13.6 Probabilité sur un espace probabilisable fini. Espace probabilisé fini. Modélisation d'une expérience aléatoire : exemple.

13.7 Soient $A_1, ..., A_n$ des événements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, Alors,$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$.

13.8 Expression de la probabilité d'un événement à l'aide des probabilités des événements élémentaires (dans le cadre d'un espace probabilisé fini)(prop. 18).

13.9 Caractérisation des probabilités sur un espace probabilisable fini à l'aide des probabilités des événements élémentaires : Si $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ (sans répétitions) et si $p_1, ..., p_n$ sont des éléments de $[0,1]$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ vérifiant $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

13.10 Définition de la probabilité uniforme sur un espace probabilisable fini. Identification de quelques situations d'équiprobabilité.

13.11 Propriétés des probabilités : probabilité de l'événement contraire, de l'événement impossible, croissance pour l'inclusion, probabilité d'une réunion de 2 événements, de 3 événements (formule du Crible). Formule des probabilités totales sans conditionnement.

Probabilités conditionnelles

13.12 Probabilités conditionnelles : définition. Pour tout événement A d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, l'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Conséquence : la liste des propriétés vérifiées par toute probabilité est vérifiée par $\mathbb{P}_A$. Interprétation d'hypothèses sous forme de probabilités conditionnelles (exemples).

13.13 Formule des probabilités composées au rang 2, puis de rang quelconque.

13.14 Formule des probabilités totales avec conditionnement. Cas particulier d'un SCE $(A, \bar{A})$ tel que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$.

13.15 Formules de Bayes.

Indépendance

13.16 Indépendance de deux événements pour une probabilité donnée. Caractérisation de l'indépendance à l'aide de probabilités conditionnelles. Stabilité de la notion d'indépendance par passage au complémentaire.

13.17 Indépendance mutuelle et indépendance deux à deux d'une famille d'événements. Stabilité par passage au complémentaire (partiellement admise). L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse : exemple.

Python

13.18 Approximation numérique (fin) : Utilisation de majorations, dans le contexte de l'étude d'une suite réelle convergente, pour approcher numériquement sa limite. Utilisation de suites adjacentes.

en devoir maison pendant les vacances

13.19 Recherche dichotomique dans une liste triée. Adaptation du tri à bulle pour trier des listes plus complexes selon des critères spécifiques.

Quelques questions de cours

1. Définir les notions d'univers fini, d'espace probabilisable fini, d'événement, d'événement élémentaire. Illustrer ces définitions à l'aide de l'expérience aléatoire consistant à lancer dix fois de suite une pièce à Pile ou Face et à noter, dans l'ordre, les résultats obtenus (variante possible d'une difficulté similaire).
2. Définir la notion de système complet d'événements. Donner deux exemples généraux, et un système complet d'événements à 3 événements pour l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés à 6 faces et à noter, dans l'ordre, les résultats obtenus.
3. Dans le cadre d'un espace probabilisable fini, montrer que pour tout système complet d'événement $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ et pour tout événement B : $B = \bigsqcup_{i=1}^{m}(B\cap A_i)$ (réunion disjointe).
4. Définir la notion de probabilité sur un espace probabilisable fini et la notion d'espace probabilisé fini. Expliquer la modélisation de l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés déséquilibrés et à noter, dans l'ordre, les résultats obtenus.
5. Énoncer et démontrer la proposition donnant la probabilité d'une réunion (finie) d'événements deux à deux incompatibles.
6. Énoncer et démontrer la proposition (20) permettant de déterminer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide des probabilités des événements élémentaires, pour tout événement A d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
7. Énoncer la proposition (21) qui caractérise les probabilités sur un espace probabilisable fini à l'aide des événements élémentaires. On pose $\Omega = [\![1, n]\!]$, déterminer les réels a pour lesquels il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall k \in \Omega, \mathbb{P}(\{k\}) = ak$.
8. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant la notion de probabilité uniforme. Déterminer la probabilité pour qu'en lançant deux dés équilibrés à 6 faces, on n'obtienne aucun 6 (après avoir modélisé le problème).
9. Énoncer la proposition donnant les propriétés vérifiées par toute probabilité sur un espace probabilisable fini (prop. 28). En démontrer quelques-unes, au choix de l'interrogateur·rice.
10. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales, avec et sans conditionnement.
11. Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées (cas général, en montrant d'abord la formule au rang 2).
12. Montrer que si A est un événement d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
13. Énoncer et démontrer les formules de Bayes. Une urne contient deux dés. L'un est équilibré, l'autre n'a que des faces 6. On pioche un dé au hasard, que l'on lance, et on note la face obtenue. Réalisant cette expérience, on obtient un 6. Quelle est la probabilité d'avoir pioché le dé équilibré?
14. Définir la notion d'indépendance de deux événements, et énoncer la caractérisation utilisant les probabilités conditionnelles. Montrer que si A et B sont des événements indépendants d'un espace probabilisé fini, alors A et $\bar{B}$ le sont.
15. Définir les notions d'indépendance deux à deux et d'indépendance mutuelle pour une famille d'événements d'un espace probabilisé fini. Donner une expérience aléatoire et trois événements deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants (preuve comprise).
16. Écrire un code Python fournissant une approximation à 10^{-6} près d'une solution de l'équation $xe^x = 1$, avec une recherche par balayage. On justifiera tout ce qui est nécessaire à l'application de cet algorithme.
17. Écrire un code Python fournissant une approximation à 10^{-6} près d'une solution de l'équation $e^{-x^2} = 2x$, avec une recherche par dichotomie. On justifiera tout ce qui est nécessaire à l'application de cet algorithme.
18. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def appartient_dicho(a,L):` prenant en entrée un nombre `a` et une liste de nombre triée dans l'ordre croissant `L` et renvoyant en sortie `True` si `a` est un élément de `L`, et `False` sinon.
19. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def TriDuree(L):` prenant en entrée une liste `L` dont les éléments sont des couples de nombres `(d,f)` représentant des plages horaires (le couple `(d,f)` représente la plage horaire commençant à l'heure `d` et finissant à l'heure `f`), et triant cette liste par durée croissante de ces plages horaires.