Lycée Hoche
ECG1A

2025-2026
Mathématiques

Devoir maison n°2

À rendre le lundi 5 janvier 2026

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction réelle définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$. On considère une suite u donnée par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudions la fonction f.
   (a) Dresser le tableau de variations de f.
   (b) Montrer qu'il existe un unique élément de $[1, +\infty[$, noté α, tel que $f(\alpha) = \alpha$, et donner son expression.
   (c) Dresser le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$.
2. On suppose dans ces sous questions que $u_0 = 1$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n \in [1, \alpha]$.
   (b) Montrer que u est croissante en utilisant la question précédente, et le résultat de la question $1(c)$.
   (c) En déduire la nature de u, et la valeur de son éventuelle limite.
3. On suppose que $u_0 = 2$.
   (a) Montrer que u est décroissante en utilisant la monotonie de f.
   (b) Étudier la nature de la suite u, et déterminer son éventuelle limite.
4. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit u une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si f est croissante, alors u est monotone. Peut-on déduire de ces données que u est croissante ?

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction réelle définie par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$. On considère la suite u donnée par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Justifier que f est bien définie. Expliquer brièvement pourquoi u_n est bien défini pour tout entier n.
2. Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$. Montrer que $[1, 3]$ est stable par f, c'est-à-dire :
   $$f([1, 3]) \subset [1, 3].$$
   Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_n$?
3. Soient $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, pour tout entier naturel n. Montrer que $(v_n)_n$ est croissante. On pourra utiliser (en le justifiant) que la fonction $g = f \circ f$ est croissante.
4. Montrer que $(w_n)_n$ est décroissante.
5. En déduire que v et w sont convergentes et déterminer leur limite.
6. Quelle est la nature de la suite u?

Exercice 3

Pour tout entier n, on note f_n la fonction polynomiale $x \mapsto x^n + x - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, et que celle-ci appartient à $]0, 1[$. On notera x_n cette solution dans la suite.
2. Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.
3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
4. Montrer que $(x_n)_n$ converge, et que sa limite l vérifie $0 < l \leq 1$.
5. Montrer que : $\forall n > 0, x_n \leq l$.
6. Montrer enfin que $l = 1$, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'équation $\sqrt{x^3 + x + 1} = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera u_n dans la suite de l'exercice.
2. Montrer que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq n$.
4. Montrer que u n'est pas majorée. En déduire la nature de u.

— *fin* —