Devoir surveillé n°3

Devoir du **samedi 20 décembre 2025**.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit.
Consignes de présentation : Écrire avec une encre bleue sombre ou noire. Encadrer les résultats. Ne pas utiliser la couleur rouge. Écrire de façon lisible. Éviter les ratures. Utiliser une règle.
Consignes de rédaction : Rédiger les raisonnements en français, dans une langue correcte et soignée, sans utiliser d'abréviation.
On rappelle que le connecteur $\Longrightarrow$ ne peut pas être utilisé comme synonyme de "donc".

Exercice 1 *Quelques application de cours*

1. Soient E et F deux ensembles. On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$.
   Montrer que si $g \circ f = id_E$ alors f est injective et g est surjective.

2. Soit $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (4x + 3y, 6x - 2y) \end{array} \right.$. Montrer que h est bijective et expliciter h^{-1}.

3. On pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2x + 3y = 0\}$ et $B = \left\{ \left(t + 1, -1 - \frac{2}{3}t \right) \; ; \; t \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $A = B$.

4. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 2^{k+1}$.

5. Déterminer les éventuelles asymptotes de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + x} - x$.

6. Dans une classe de 45 élèves, tous étudient au moins l'une des langues vivantes suivantes : anglais, allemand et espagnol. On sait qu'il y a 32 élèves en anglais, 20 élèves en allemand et 28 élèves en espagnol. On sait aussi que 15 élèves étudient à la fois l'anglais et l'allemand, que 11 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol et que 19 étudient à la fois l'anglais et l'espagnol. Combien étudient les trois langues ?

7. Une urne contient 7 boules rouges et 4 boules blanches. On tire successivement et sans remise 3 boules de cette urne et on note dans l'ordre les couleurs obtenues.
   (*a*) Combien existe-t-il de résultats ?
   (*b*) Combien existe-t-il de résultats commençant par la couleur blanche ?
   (*c*) Combien existe-t-il de résultats comportant exactement 2 boules rouges ?

8. Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On tire successivement et sans remise n boules de cette urne et on note dans l'ordre les couleurs obtenues.
   (*a*) Combien existe-t-il de résultats ?
   (*b*) Soit k un entier naturel tel que $k \leq n$.
   Combien existe-t-il de résultats comportant exactement k boules rouges ?
   (*c*) En déduire une démonstration de la formule de Vandermonde :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ *Étude de la série harmonique*

On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Partie I : Limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$.
2. En déduire que la suite (H_n) diverge vers $+\infty$.
3. Écrire une fonction Python, nommée `Harm`, prenant en entrée un entier n non nul et renvoyant en sortie la liste des termes $[H_1, H_2, \ldots, H_n]$.

Partie II : Équivalent de (H_n).

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$$
5. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ en fonction de H_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
6. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$
7. Déterminer la limite de la suite $\displaystyle\left(\frac{H_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$.

Partie III : Nombre γ d'Euler.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = H_n - \ln(n)$ et $b_n = a_n - \dfrac{1}{n}$.

8. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
9. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
10. Montrer que les suites a et b convergent vers une limite commune.
Cette limite est notée γ, et est appelée la constante γ d'Euler.
11. Montrer que $\gamma \in]0,1[$.

Partie IV : Une autre expression de (H_n).

12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{k}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{k}\binom{n}{k} + \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$
13. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Exercice 3 *Étude d'une fonction*

Soit f la fonction de la variable réelle x donnée par l'expression $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ puis donner une expression de f'.
3. Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on pose $u(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Justifier que la fonction u est bien définie et que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
$$u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$
4. Étudier le signe de u.

   Indication : on pourra étudier les variations de cette fonction u et présenter les résultats dans un tableau de variations.
5. Déterminer les limites de la fonction f au bord de son domaine de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe de f.
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? En -1 ?
8. Dessiner la courbe représentative de f (en faisant apparaître les éventuelles asymptotes).
9. Écrire un code Python permettant de tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[2, 50]$.

Exercice 4 *Moyenne arithmético-géométrique*

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et par les relations de récurrence
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $b_n \leq a_n$.

   (b) Étudier la monotonie des deux suites et montrer qu'elles convergent toutes deux.

   (c) Montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ont même limite $M = M(a,b)$ - que l'on ne cherchera pas à calculer -.
2. (a) Montrer que, pour tout couple $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq |x - y|$.

   Indication : on pourra commencer par étudier le cas $x \geq y$.

   (b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n - b_n \leq \dfrac{|a-b|}{2^n}$.
3. Écrire une fonction Python, nommée `approx_M` , prenant en entrée deux réels $a > 0$ et $b > 0$, et renvoyant en sortie la limite $M(a,b)$ à 10^{-3} près.
4. On se propose d'étudier de façon plus précise la rapidité de la convergence des deux suites (a_n) et (b_n) vers M.

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{(a_n - b_n)^2}{8a_{n+2}}$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{n+k} - b_{n+k} \leq 8M \left(\dfrac{a_n - b_n}{8M}\right)^{2^k}$

   (c) Montrer qu'il existe $\gamma \in]0,1[$, $\alpha > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \implies a_n - b_n \leq \alpha \cdot \gamma^{2^n}$

5. Montrer que la fonction $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto M(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:
   (a) $M(x,x) = x$
   (b) $M(x,y) = M(y,x)$
   (c) $M(kx,ky) = kM(x,y)$ pour tout $k > 0$
   (d) $M(x,y) = M(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy})$

Exercice 5 *Polynômes et sommes*

1. Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = X^3$.
   En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n(X+1) - P_n(X) = X^n, \;\; P_n(0) = 0$$

— *Fin de l'énoncé* —