$\boxed{\text{Correction du DS n°3}}$

Exercice 1

1. – Montrons l'injectivité de f. Soit $(x,x') \in E^2$. Supposons que $f(x) = f(x')$. Alors, en composant à gauche par g, on obtient $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme $g \circ f = id_E$, on obtient $x = x'$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est injective.}}$
   – Ensuite, montrons que g est surjective. Soit $y \in E$. Comme $g \circ f = id_E$, on a $y = g(f(y))$.
   En posant, $x = f(y) \in F$, on obtient $y = g(x)$. Ainsi, $\boxed{g \text{ est surjective.}}$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que l'équation $h(x,y) = (a,b)$ a une et une seule solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a les équivalences suivantes :

$$h(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} 4x + 3y &= a \\ 6x - 2y &= b \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 3y &= a \\ -13y &= 2b - 3a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x &= a - 3y \\ y &= \dfrac{3a - 2b}{13} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \dfrac{2a + 3b}{26} \\ y &= \dfrac{3a - 2b}{13} \end{cases}$$

   Donc $\boxed{h \text{ est bijective et } h^{-1} \text{ est l'application } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\dfrac{2a+3b}{26}, \dfrac{3a-2b}{13}\right) \in \mathbb{R}^2.}$

3. Procédons par double inclusion.
   • Soit $a \in A$. On dispose alors d'un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = (x,y)$ et $1 + 2x + 3y = 0$.
   Posons $t = x - 1 \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $x = t + 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & & 1 + 2(t+1) + 3y &= 0 \\ &\text{puis} & 3y &= -3 - 2t \\ &\text{d'où} & y &= -1 - \frac{2}{3}t \end{aligned}$$

   On a donc $a = \left(t + 1, -1 - \dfrac{2}{3}t\right)$. Ce qui montre que $a \in B$.
   • Réciproquement, soit $b \in B$. On dispose alors d'un réel t tel que $a = \left(t + 1, -1 - \dfrac{2}{3}t\right)$. De plus,

$$1 + 2(t+1) + 3\left(-1 - \frac{2}{3}t\right) = 1 + 2t + 2 - 3 - 2t = 0$$

   Il vient : $b \in A$.
   On a montré par double inclusion que $\boxed{A = B.}$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^{k+1}$. Fixons désormais $n \in \mathbb{N}$.
   - Si $n = 0$: On a $S_0 = 0 \times \binom{0}{0} \times 2^1 = 0$.
   - Si $n \geq 1$: Comme le premier terme de cette somme est nul,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}2^{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}2^{j+2}$$

   en effectuant le changement d'indice $j = k - 1$. Ainsi, par linéarité et en utilisant la formule du binôme de Newton,

$$S_n = n \times 2^2 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^j = 4n \times (1+2)^{n-1} = 4n \times 3^{n-1}$$

   On obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 4n \times 3^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}$

5. Commençons par déterminer l'ensemble de définition de h.
La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) \text{ est bien définie ssi } x^2 + x \geq 0 \text{ ssi } x(x+1) \geq 0$$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x			$-$		0	$+$	
$x+1$		$-$	0		$+$		
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\mathcal{D}_h =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$. Désormais, étudions les limites h au bord de son domaine de définition.

- En $+\infty$: pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h(x) = \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} + x} = \frac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} + 1}$$

Or, $1 + \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ donc par continuité de la racine carrée en 1, $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
Puis, par somme et inverse, on obtient $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{La courbe de } h \text{ admet une asymptote horizontale en } +\infty \text{ d'équation } y = \dfrac{1}{2}.}$

- En -1^- et en 0^+ : la fonction est continue en -1 et en 0 par composition de fonctions continues sur leur domaine de définition. Il n'y a donc pas d'asymptote à la courbe en ces points.

- En $-\infty$: pour tout réel $x \leq -1$,

$$h(x) = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x = -x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x = -x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)$$

Or, $1 + \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$ donc par continuité de la racine carrée en 1, $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$.
Puis, par somme et produit on obtient $h(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.
Montrons alors que la courbe de h admet une asymptote oblique en $-\infty$. Pour tout réel $x \leq -1$,

$$\frac{h(x)}{x} = -\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)$$

En utilisant les limites précédentes, on a $\dfrac{h(x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -2$
De plus, pour tout réel $x \leq -1$,

$$h(x) + 2x = \sqrt{x^2+x} + x = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} - x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - x} = \frac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - x} = -\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} + 1}$$

En utilisant les limites précédentes, on a $h(x) + 2x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{La courbe de } h \text{ admet une asymptote oblique en } -\infty \text{ d'équation } y = -2x - \dfrac{1}{2}.}$

6. On note E l'ensemble des élèves de la classe, A l'ensemble des élèves étudiant l'anglais, B l'ensemble des élèves étudiant l'allemand et C l'ensemble des élèves étudiant l'espagnol. Comme tous les élèves étudient au moins une langue vivante, on a

$$E = A \cup B \cup C$$

De plus, l'énoncé donne les cardinaux suivants :

$$\text{Card}(E) = 45, \quad \text{Card}(A) = 32, \quad \text{Card}(B) = 20, \quad \text{Card}(C) = 28$$

$$\text{Card}(A \cap B) = 15, \quad \text{Card}(A \cap C) = 19, \quad \text{Card}(B \cap C) = 11$$

On veut déterminer $\text{Card}(A \cap B \cap C)$. D'après la formule du crible de Poincaré,

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$$

D'où,

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cap B \cap C) &= \text{Card}(E) - \text{Card}(A) - \text{Card}(B) - \text{Card}(C) + \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) \\ &= 45 - 32 - 20 - 28 + 15 + 19 + 11 \\ &= 10\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a 10 élèves qui étudient les trois langues.}}$

7. (*a*) On note E l'ensemble des résultats. Alors

$$E = \{RRR, RRB, RBR, RBB, BRR, BRB, BBR, BBB\}$$

$\boxed{\text{Il y a donc 8 résultats possibles.}}$

(*b*) L'ensemble des résultats commençant pat la couleur blanche est $\{BRR, BRB, BBR, BBB\}$.
$\boxed{\text{Il y a 4 résultats commençant par la couleur blanche.}}$

(*c*) L'ensemble des résultats comportant exactement 2 boules rouges est $\{RRB, RBR, BRR\}$.
$\boxed{\text{Il y a 3 résultats comportant exactement 2 boules rouges}}$

8. (*a*) Comme on tire n boules et qu'il y a n boules rouges et n boules blanches, on dispose d'une bijection entre l'ensemble des résultats et $\{0, 1\}^n$ en associant le nombre 0 au tirage d'une boule rouge et le nombre 1 au tirage d'une boule blanche. Or, $\text{Card}(\{0, 1\}^n) = 2^n$. $\boxed{\text{Il y a donc } 2^n \text{ résultats possibles}}$

(*b*) Un résultat comportant exactement k boules rouges est entièrement déterminé par la position de ces k boules rouges dans la liste de longueur n. Il y en a donc autant que de parties à k éléments d'un ensemble de cardinal n, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. $\boxed{\text{Il y a } \binom{n}{k} \text{ résultats comportant exactement } k \text{ boules rouges.}}$

(*c*) Désormais, on décide que les boules sont discernables (par exemple, numérotées de 1 à $2n$) et que l'on note le numéro des boules obtenues sans tenir compte de l'ordre.
D'une part, il y a autant de configurations que de parties à n éléments d'un ensemble de cardinal $2n$, c'est-à-dire $\binom{2n}{n}$.
D'autre part, on peut distinguer des configurations en fonction du nombre de boules rouges qu'elles contiennent. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Si une configuration est composée de k boules rouges, alors elle est déterminée par les choix successifs :

- des k boules rouges : il y a autant de possibilités que de parties à k éléments d'un ensemble de cardinal n donc $\binom{n}{k}$
- des $n - k$ boules blanches : il y a autant de possibilités que de parties à $n - k$ éléments d'un ensemble de cardinal n donc $\binom{n}{n-k}$

Par principe multiplicatif, le nombre de configurations à k boules rouges est $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$
Ces cas étant disjoints, le nombre total de configurations est

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \quad \text{(par symétrie des coefficients binomiaux)}$$

Il vient

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Comme ce résultat est trivial pour $n = 0$, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}$$

Exercice 2

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de concavité du logarithme,

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

On a montré :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sommons les inégalités obtenues à la question précédente pour $k \in [\![1, n]\!]$. Il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \text{ car la somme est téléscopique}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geq \ln(n+1)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty}$$

3.

```python
def Harm(n):
L=[1]
for i in range(2,n+1) :
L.append(L[-1]+1/i)
return L
```

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) &\iff -\frac{1}{k+1} \geq -(\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &\iff -\frac{1}{k+1} \geq \ln(k) - \ln(k+1) \\ &\iff -\frac{1}{k+1} \geq \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ &\iff -\frac{1}{k+1} \geq \ln\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right) \\ &\iff -\frac{1}{k+1} \geq \ln\left(1 + \frac{-1}{k+1}\right)\end{aligned}$$

Or, $-\dfrac{1}{k+1} > -1$ donc la dernière inégalité est vraie d'après l'inégalité de concavité du logarithme. Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant le changement d'indice affine $j = k+1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right) - \frac{1}{1} = H_n - 1.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n - 1$ (question précédente). En sommant les inégalités obtenues à la question 4) pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient
$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n) - \ln(1)$$
car la somme est télescopique. On a donc $H_n - 1 = S_n \leq \ln(n)$, d'où
$$H_n \leq \ln(n) + 1.$$
De plus, dans la question 2) nous avons obtenu $\ln(n+1) \leq H_n$.
Par croissance du logarithme, $\ln(n) \leq \ln(n+1)$ d'où :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on a $\ln(n) > \ln(1) = 0$ donc grâce à la question précédente,
$$1 \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$
De plus,
$$\lim_{n \to +\infty} 1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right) = 1$$
D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0 \text{ d'après la question 4.} \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } a \text{ est décroissante.}}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} - \frac{1}{n+1} - a_n + \frac{1}{n} \\ &= a_{n+1} - a_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \geq 0 \text{ d'après la question 1.} \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } b \text{ est croissante.}}$

10. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n - a_n = -\frac{1}{n}$ donc $b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. De plus la suite a est croissante et la suite b est décroissante. Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, $\boxed{\text{les suites } a \text{ et } b \text{ convergent vers une limite commune.}}$

11. Grâce au théorème des suites adjacentes, on sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq \gamma \leq a_n$.
En particulier, $b_2 \leq \gamma \leq a_2$. Or,
$$a_2 = H_2 - \ln(2) = 1 + \frac{1}{2} - \ln(2) = (1 - \ln(2)) + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0 \qquad \text{et} \qquad b_2 = a_2 - \frac{1}{2} = 1 - \ln(2) < 1$$
Par transitivité,
$$\boxed{0 < \gamma < 1}$$

12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule du triangle de Pascal,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{k}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{k}\binom{n}{k} + \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$$

Or,

$$k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$$

Il vient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{1}{k}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{k}\binom{n}{k} + \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}}$

13. Montrons par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = H_n\ \text{"}$$

Initialisation : $P(1)$ est vraie car

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{1}{k} = \frac{(-1)^0}{1}\binom{1}{1} = 1 = H_1$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons $P(n+1)$. Grâce à la question précédente,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n+1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}\binom{n}{k} + \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}\right)\right] + \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n+1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n+1}{n+1} \qquad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

D'une part, d'après $P(n)$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = H_n$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k} && \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k} - (-1)^{0-1}\binom{n+1}{0}\right] \\
&= \frac{1}{n+1}(1+(-1))^{n+1} + \frac{1}{n+1} && \text{d'après le binôme de Newton} \\
&= \frac{0^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1} && \text{car } n+1 \geq 1
\end{aligned}$$

On obtient alors,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} = H_n + \frac{1}{n+1} = H_{n+1}$$

Ce qui montre $P(n+1)$ et achève l'hérédité.
Conclusion : On a montré par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{n}\binom{n}{k} = H_n}$$

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $f(x) = \exp\left(x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$ est bien définie si, et seulement si, $1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+x}{x}$ est défini et strictement positif. Or, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0		$+$		
x			$-$		0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$

2. La fonction f est dérivable sur son domaine en tant que composée de fonctions qui le sont.
De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}\right] \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] f(x)$$

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est aussi strictement positive sur son domaine de définition. Ainsi, $\boxed{u \text{ est bien définie}}$. Avec la question précédente, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f,\ u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}$$

4. La fonction u est dérivable sur son domaine de définition en tant que somme de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1 - x + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

donc $u'(x)$ est du signe de $-x$.
Afin de dresser un tableau de variations partiel de u, étudions les limites en $\pm\infty$ de u.
On a $1 + \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$ donc par continuité du logarithme en 1, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.
Par somme, on obtient : $u(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$. Ainsi,

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$				$-$	
u	0	$\nearrow$				$\searrow$	0

Par conséquent, $\boxed{\text{la fonction } u \text{ est positive sur } \mathcal{D}_f.}$

5. <u>En $\pm\infty$:</u> On pose

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow &]-1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad h : \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{x} \end{array} \right.$$

de telle sorte que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = h(g(x))$. D'une part, $g(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$.
D'autre part, par dérivabilité de la fonction logarithme en 1, $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln'(1) = 1$.
Par composition, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Par continuité de la fonction exponentielle en 1, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} e}$
<u>En -1^- :</u> $1+\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to -1^-]{} 0^+$ car la fonction $x \mapsto 1+\dfrac{1}{x}$ est positive sur $]-\infty,-1[$.
Par composition, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to -1^-]{} -\infty$. Par produit puis par composition, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to -1^-]{} +\infty.}$
<u>En 0^+ :</u> Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x\ln(x+1) - x\ln(x) = x^2\,\frac{\ln(1+x)}{x} + x\ln(x)$$

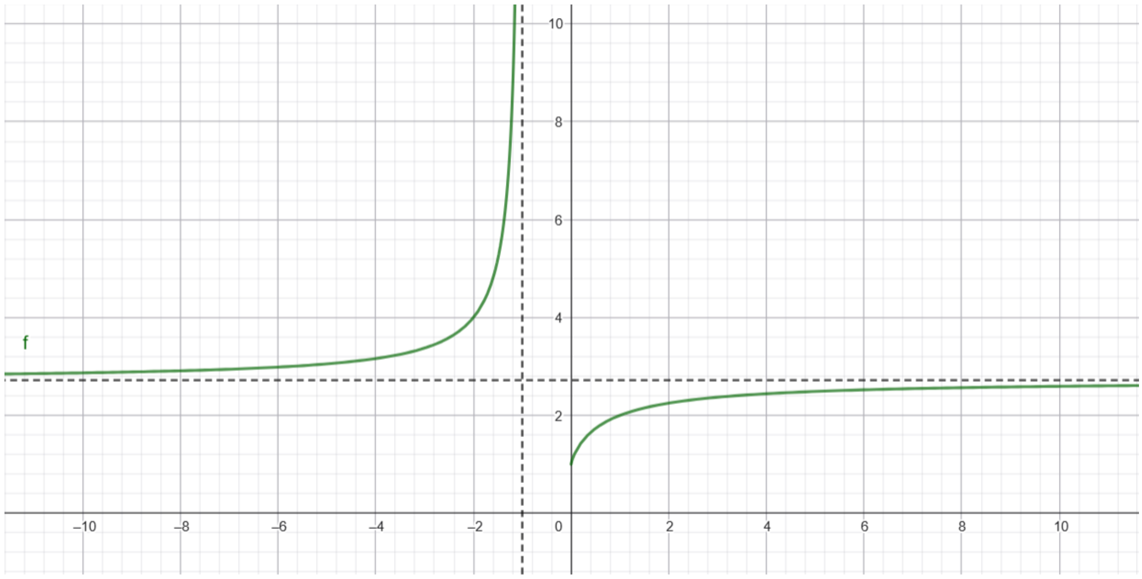
D'une part, par dérivabilité de ln en 1, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \ln'(1) = 1$ puis par produit, $x^2\,\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
D'autre part, d'après le théorème des croissances comparées, $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Par somme, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Puis, par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1.}$
Avec ces limites, on en déduit que :
$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ admet une asymptote horizontale en } +\infty \text{ et en } -\infty \text{ d'équation } y = e.}$
$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = -1.}$

6. La fonction f est strictement positive sur $\mathcal{D}_f$ donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x)$ est du même signe que $u(x)$.
On obtient, en utilisant les questions 4 et 5 :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
f	e	$\nearrow$	$+\infty$		1	$\nearrow$	e

7. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$
Comme $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$, $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } -1.}$

8.



9.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return np.exp(x*np.log(1+1/x))
listeX=np.linspace(2,50,1000)
listeY=[f(x) for x in listeX]
plt.plot(listeX,listeY,label="f")
plt.legend()
plt.show()
```

Exercice 4

1. (a) Le premier point à justifier est l'existence des suites. Notons

$$F: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) \end{array} \right.$$

Par le théorème d'existence des suites récurrentes, il existe une unique suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_0=(a,b)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=F(U_n)$, c'est-à-dire telle que $a_0=a$, $b_0=b$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$. Comme F est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, ces suites sont strictement positives.
Notons ensuite que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+1}-b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_nb_n} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_nb_n}+b_n}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)^2}{2}$$

Il en résulte que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}\geq b_{n+1}$, c'est-à-dire $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n\leq a_n}$

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1}-a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} \leq 0 \qquad \text{d'après la question précédente}$$

Alors, $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geq 0$$
d'après la question précédente et par croissance de $x \to \sqrt{x}$. Alors, $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$
En utilisant la monotonie de ces deux suites et la question précédente, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_1 \leq b_n \leq a_n \leq a_1$$
Par conséquent, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par a_1, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(b_n)_n \text{ converge.}}$ De même, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par b_1 donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(a_n)_n \text{ converge.}}$

(c) Notons l et m les limites respectives de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
Par passage à la limite, on obtient $l = \dfrac{l+m}{2}$, d'où $l = m$. Donc $\boxed{(a_n)_n \text{ et } (b_n)_n \text{ ont même limite.}}$

2. (a) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Raisonnons par disjonction de cas.
- Cas 1 : Supposons que $x \geq y$. Alors, par croissance de la racine carrée,
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - 2\sqrt{y}\sqrt{y} + y = x - 2y + y = x - y = |x - y|$$
- Cas 2 : Supposons que $x < y$. Alors, par croissance de la racine carrée,
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - 2\sqrt{y}\sqrt{y} + y = x - 2x + y = y - x = |x - y|$$
Dans tous les cas, on a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq |x - y|$ donc $\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq |x - y|}$

(b) Montrons par récurrence,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H(n) : \text{"}\ a_n - b_n \leq \frac{a_1 - b_1}{2^{n-1}}\ \text{"}$$
Initialisation : $H(1)$ est vraie car $\dfrac{a_1 - b_1}{2^{1-1}} = a_1 - b_1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $H(n)$ est vraie et montrons $H(n+1)$.
Alors, par croissance de $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$,
$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}$$
D'après $H(n)$, on a
$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1 - b_1}{2^{n-1}} = \frac{a_1 - b_1}{2^n}$$
Ce qui montre $H(n+1)$ et achève l'hérédité.
Conclusion : On a montré par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n - b_n \leq \frac{a_1 - b_1}{2^{n-1}}$$
De plus, en reprenant la question 1.a) et utilisant la question précédente,
$$a_1 - b_1 = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \leq \frac{|a - b|}{2}$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n - b_n \leq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{|a - b|}{2^{n-1}} = \dfrac{|a - b|}{2^n}$.
Ce résultat est aussi vrai pour $n = 0$ car $a - b \leq |a - b|$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n - b_n \leq \dfrac{|a - b|}{2^n}}$

3.
```
import numpy as np
def approx_M(a,b):
    u = a
    v = b
    while abs(u-v) > 10**(-3) :
        u,v = (u+v)/2,np.sqrt(u*v)
    return (u+v)/2
```

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En reprenant la question $1.a)$,

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} \quad \text{et} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \frac{a_n + b_n + 2\sqrt{a_n b_n}}{4} = \frac{\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2}{4}$$

D'où,

$$(a_{n+1} - b_{n+1})a_{n+2} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2}{8} = \frac{(a_n - b_n)^2}{8}$$

Il vient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{8a_{n+2}}}$

(b) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ H(k) : \text{''}\ a_{n+k} - b_{n+k} \leq 8M \left(\frac{a_n - b_n}{8M}\right)^{2^k} \text{''}$$

<u>Initialisation :</u> $H(0)$ est vraie car

$$8M \left(\frac{a_n - b_n}{8M}\right)^{2^0} = 8M \left(\frac{a_n - b_n}{8M}\right)^1 = 8M \cdot \frac{a_n - b_n}{8M} = a_n - b_n$$

<u>Hérédité :</u> Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(k)$ est vraie et montrons $H(k+1)$.

D'après la question précédente, $a_{n+k+1} - b_{n+k+1} = \dfrac{(a_{n+k} - b_{n+k})^2}{8a_{n+k+2}}$.
Or, $M \leq a_{n+k+2}$ car la suite $(a_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ tend en décroissant vers sa limite M. Il vient

$$a_{n+k+1} - b_{n+k+1} \leq \frac{(a_{n+k} - b_{n+k})^2}{8M}$$

D'après $H(k)$,

$$a_{n+k+1} - b_{n+k+1} \leq \frac{\left(8M \left(\frac{a_n - b_n}{8M}\right)^{2^k}\right)^2}{8M} = \frac{8M \left(\frac{a_n - b_n}{8M}\right)^{2^{k+1}}}{8M} = 8M \left(\frac{a_n - b_n}{8M}\right)^{2^{k+1}}$$

Ce qui montre $H(k+1)$ et achève l'hérédité.
<u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+k} - b_{n+k} \leq 8M \left(\frac{a_n - b_n}{8M}\right)^{2^k}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+k} - b_{n+k} \leq 8M \left(\frac{a_n - b_n}{8M}\right)^{2^k}}$

(c) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$, on dispose d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{a_n - b_n}{8M} \leq \dfrac{1}{2}$.

D'après la question précédente, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+k} - b_{n+k} \leq 8M \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^k}$, ce qui équivaut à

$$\forall p > n,\ a_p - b_p \leq 8M \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{p-n}}$$

Remarquons que pour $p > n$,

$$8M \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{p-n}} = 8M \left(\frac{1}{2}\right)^{2^p \times 2^{-n}} = 8M \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-n}}\right]^{2^p}$$

Posons alors $\alpha = 8M > 0$, $\gamma = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{-n}} \in]0,1[$ et $n_0 = n + 1 \in \mathbb{N}$, de telle sorte que

$$\forall p \geq n_0,\ a_p - b_p \leq \alpha \cdot \gamma^{2^p}$$

On a montré qu' $\boxed{\text{il existe } \gamma \in]0,1[,\ \alpha > 0 \text{ et } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que : } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ p \geq n_0 \implies a_p - b_p \leq \alpha \cdot \gamma^{2^p}.}$

5. Fixons deux réels strictement positifs x et y.

   (a) Prenons $a = x$ et $b = x$ dans la définition des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. Alors, on observe que

   $$a_1 = \frac{x+x}{2} = x \quad \text{et} \quad b_1 = \sqrt{x \times x} = x$$

   Par une récurrence immédiate, les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont constantes égales à x. Elles convergent donc vers x. Par unicité de la limite, il vient $\boxed{M(x,x) = x}$

   (b) Considérons les suites :

   $$\begin{cases} a_0 = x, \ b_0 = y \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = x, \ v_0 = y \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Remarquons que,

   $$a_1 = \frac{x+y}{2} = \frac{y+x}{2} = u_1 \quad \text{et} \quad b_1 = \sqrt{xy} = \sqrt{yx} = v_1$$

   Par une récurrence immédiate, les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont respectivement égales aux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$. Or, d'après la question 1.c), $(a_n)_n$ converge vers $M(x,y)$ et $(u_n)_n$ converge vers $M(y,x)$. Comme ces deux suites sont égales à partir du rang 1, elles ont même limite. D'où $\boxed{M(x,y) = M(y,x)}$

   (c) Soit k un réel strictement positif. Considérons les suites :

   $$\begin{cases} a_0 = x, \ b_0 = y \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = kx, \ v_0 = ky \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Remarquons que,

   $$u_1 = \frac{kx+ky}{2} = k\frac{x+y}{2} = ka_1 \quad \text{et} \quad v_1 = \sqrt{kx \times ky} = k\sqrt{xy} = kb_1$$

   Par une récurrence immédiate, les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont respectivement égales aux suites $(ka_n)_n$ et $(kb_n)_n$. Or, d'après la question 1.c), $(a_n)_n$ converge vers $M(x,y)$ donc par produit, $(ka_n)_n$ converge vers $kM(x,y)$, et $(u_n)_n$ converge vers $M(kx,ky)$. Comme ces deux suites sont égales, elles ont même limite. D'où $\boxed{M(kx,ky) = kM(x,y)}$

6. Considérons les suites :

   $$\begin{cases} a_0 = x, \ b_0 = y \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{x+y}{2}, \ v_0 = \sqrt{xy} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} & \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Remarquons que $a_1 = u_0$ et $b_1 = v_0$. Par une récurrence immédiate, les suites $(u_{n-1})_{n\geq 1}$ et $(v_{n-1})_{n\geq 1}$ sont respectivement égales aux suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$. Or, d'après la question 1.c), $(a_n)_n$ converge vers $M(x,y)$ et $(u_n)_n$ converge vers $M(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy})$ donc $(u_{n-1})_{n\geq 1}$ aussi. Comme ces deux suites sont égales, elles ont même limite. D'où $\boxed{M(x,y) = M(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy})}$

Exercice 5

1. Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, on peut montrer que $P(X+1)-P(X)$ est un polynôme de degré $n-1$ (en exercice). Ainsi, considérons un polynôme de degré 4 de la forme $P(x) = aX^4+bX^3+cX^2+dX$ avec a, b, c et d des réels, a étant non nul. Alors, en utilisant le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}P(X+1)-P(X) &= a(X+1)^4+b(X+1)^3+c(X+1)^2+d(X+1)-aX^4-bX^3-cX^2-dX\\ &= a(X^4+4X^3+6X^2+4X+1)+b(X^3+3X^2+3X+1)+c(X^2+2X+1)\\ &\qquad +d(X+1)-aX^4-bX^3-cX^2-dX\\ &= 4aX^3+(6a+3b)X^2+(4a+3b+2c)X+(a+b+c+d)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(X+1)-P(X)=X^3 \iff \begin{cases} 4a &= 1\\ 6a+3b &= 0\\ 4a+3b+2c &= 0\\ a+b+c+d &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1/4\\ b &= -2a\\ c &= -2a-3b/2\\ d &= -a-b-c\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= 1/4\\ b &= -1/2\\ c &= -2a-3b/2\\ d &= -a-b-c\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1/4\\ b &= -1/2\\ c &= 1/4\\ d &= -a-b-c\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= 1/4\\ b &= -1/2\\ c &= 1/4\\ d &= 0\end{cases}$$

Par conséquent, grâce à ces équivalences, le polynôme

$$P = \frac{1}{4}(X^4-2X^3+X^2) = \frac{1}{4}X^2(X^2-2X+1) = \frac{X^2(X-1)^2}{4}$$

vérifie $P(X+1)-P(X)=X^3$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n}(P(k+1)-P(k)) = P(n+1)-P(0) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

car on reconnaît une somme télescopique. Il vient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

2. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit P_n un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
• Analyse : Supposons que $P_n(X+1)-P_n(X)=X^n$ et que $P_n(0)=0$. Alors, d'après le raisonnement de la question 1, P_n est un polynôme de degré $n+1$. Écrivons $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_kX^k$ avec $a_0, a_1, \ldots a_{n+1}$ des réels et $a_{n+1} \neq 0$. Or, $0 = P_n(0) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k0^k = a_0$. Donc $P_n(X) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_kX^k$. On a alors, en utilisant le

binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
P(X+1)-P(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k[(X+1)^k - X^k] \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a_k \left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X^j - X^k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a_k \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{k-1} a_k\binom{k}{j}X^j \\
&= \sum_{0\leq j<k\leq n+1} a_k\binom{k}{j}X^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j+1}^{n+1} a_k\binom{k}{j}X^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=j+1}^{n+1} a_k\binom{k}{j}\right)X^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} A_j X^j
\end{aligned}$$

où $A_j = \sum\limits_{k=j+1}^{n+1} a_k\binom{k}{j}$ pour tout $j \in [\![0,n]\!]$. Donc,

$$P(X+1)-P(X)=X^n \iff \left\{\begin{array}{ll} A_n & =1 \\ A_{n-1} & =0 \\ A_{n-2} & =0 \\ \vdots & \vdots \vdots \\ A_0 & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \binom{n+1}{n}a_{n+1} & =1 \\ \binom{n+1}{n-1}a_{n+1}+\binom{n}{n-1}a_n & =0 \\ \binom{n+1}{n-2}a_{n+1}+\binom{n}{n-2}a_n+\binom{n-1}{n-2}a_{n-1} & =0 \\ \vdots & \vdots\vdots \\ a_{n+1}+a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1 & =0 \end{array}\right.$$

On obtient ainsi un système triangulaire avec des coefficients diagonaux non tous nuls, il est donc de Cramer. Par conséquent, ce système admet une unique solution que l'on pourrait déterminer en résolvant les équations une à une. On trouve alors une unique valeur pour $a_{n+1}, a_n, \dots, a_1$. Ce qui montre que, sous réserve d'existence, ce polynôme est unique.

• Synthèse : Reprenons les coefficients $a_1, \dots a_{n+1}$ déterminés précédemment et posons $P_n(X) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k X^k$.
Donc, $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$ et $P_n(0) = 0$ (grâce aux équivalences de la partie analyse).
Ainsi, par analyse-synthèse,

$$\boxed{\text{il existe un unique polynôme } P_n \text{ tel que } P_n(X+1)-P_n(X)=X^n \text{ et } P_n(0)=0}$$