Chapitre 12 : Calcul matriciel

ECG1 A 2025-2026, Lycée Hoche

Table des matières

Une matrice réelle est un tableau de nombres réels comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dans ce chapitre, on définit des opérations portant sur les matrices (addition, produit par un réel, produit matriciel, transposition) et on s'intéresse aux premières propriétés liées à ces opérations. Les matrices sont directement liées aux systèmes linéaires, et s'avéreront jouer un rôle central dans l'étude de phénomènes liés à la notion de linéarité (chapitres espaces vectoriels et applications linéaires).

I. Matrices et opérations

1. Notion de matrice

a) Matrice

Définition 1. Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1.

(i) On appelle ***matrice (réelle) à** n **lignes et** p **colonnes*** la donnée d'une famille $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de réels. Une telle matrice est représentée sous la forme d'un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

(ii) On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ***l'ensemble*** des matrices réelles à n lignes et p colonnes.

(iii) Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, on dit que le réel $a_{i,j}$ est le ***coefficient*** de A en i-ième ligne et j-ième colonne. On dit aussi que $a_{i,j}$ est le coefficient d'indice (i,j) de A.

Remarque. (i) On trouve la variation de notation suivante :

$$A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}.$$

(ii) Si A est une matrice à n lignes et p colonnes, on dit aussi que A est une matrice de taille (n,p).

(iii) On retiendra, pour l'ordre des indices, la taille... Dès que la question se pose : **ligne puis colonne**.

Exemple 2. (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

Notant $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,2]\!]\times[\![1,3]\!]}$, on a par exemple :

$$a_{1,2} = 3 \text{ et } a_{2,2} = -1.$$

(ii) La matrice $A = ((-1)^i 2^j)_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 2}}$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} (-1)^1 2^1 & (-1)^1 2^2 \\ (-1)^2 2^1 & (-1)^2 2^2 \\ (-1)^3 2^1 & (-1)^3 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Définition 3. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle ***matrice nulle de taille*** (n,p) la matrice de taille (n,p), notée $0_{n,p}$, dont tous les coefficients sont nuls. Autrement dit, $0_{n,p}$ est donnée par

$$0_{n,p} = (0)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes.}$$

Remarque. Soit $n \geq 1$. La matrice nulle de taille (n,n), $0_{n,n}$, est notée plus simplement 0_n.

Exemple 4. (i) $0_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque. Vue la définition, **deux matrices données sont égales si et seulement si elles ont la même taille et les mêmes coefficients**. Autrement dit, si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,q]\!]}$ sont deux matrices réelles :

$$A = B \iff \begin{cases} n = m \text{ et } p = q \\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a_{i,j} = b_{i,j} \end{cases}.$$

b) Matrice carrée

Définition 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle ***matrice carrée*** de taille n toute matrice de taille (n,n). On note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n.

Remarque. Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ est parfois notée plus simplement :

$$A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}.$$

L'indice i des lignes apparait alors avant l'indice j des colonnes("$1 \leq i,j \leq n$").

Définition 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle ***matrice identité de taille*** n la matrice carrée de taille n, notée I_n, donnée par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 7. La matrice identité de taille 3 est :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. On pose, pour tous entiers i et j :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

($\delta_{i,j}$ est appelé le symbole de Kronecker d'indice i, j). Alors, $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Définition 8. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$.
Les réels $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ sont appelés les coefficients diagonaux de A.

Exemple 9. Les coefficients diagonaux de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ sont 1, 5 et 9.

c) Matrice ligne, matrice colonne

Définition 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) On appelle matrice ligne de taille n toute matrice de taille $(1, n)$.

(ii) On appelle matrice colonne de taille n toute matrice de taille $(n, 1)$. Une matrice colonne est aussi appelée un vecteur colonne.

(iii) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On appelle k-ième ligne de A la matrice ligne :

$$\begin{pmatrix} a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,p} \end{pmatrix}.$$

- Soit $k \in [\![1, p]\!]$. On appelle k-ième colonne de A la matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \dots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Exemple 11. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de taille 3.
La 3-ième ligne de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$. Sa 2-ième colonne est $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. Somme de matrices

La somme de deux matrices est très simple.

Définition 12. Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$.
Soient A et B deux matrices de même taille (n,p). Notons $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
On appelle ***somme des matrices*** A ***et*** B la matrice notée $A+B$ donnée par :

$$A+B = (a_{i,j}+b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

Exemple 13. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1 & 2+0\\ 3+1 & 4+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}$.
La formule signifie par exemple :

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a' & b' & c'\\ d' & e' & f'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+a' & b+b' & c+c'\\ d+d' & e+e' & f+f'\end{pmatrix}.$$

Remarque. Attention, la somme de deux matrices A et B n'est définie **que si** A **et** B **ont même taille**.
Par exemple, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ **n'a aucun sens**, tout comme $\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Proposition 14. *Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Alors, pour tout $(A,B,C)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^3$:*
- *(i)* $A+(B+C) = (A+B)+C$ *(La somme de matrices est dite associative.)*
- *(ii)* $A+B = B+A$ *(La somme de matrices est dite commutative.)*
- *(iii)* $A+0_{n,p} = 0_{n,p}+A = A$. *(On dit que $0_{n,p}$ et neutre pour la somme.)*

Démonstration. À noter. □

Remarque. La somme de matrices est associative et commutative. Par conséquent, dans une somme de matrices, on peut enlever les parenthèses sans ambiguïté et réarranger les termes. Par exemple, si A,B,C sont des matrices de même taille :

$$A+(B+C) = A+B+C = B+A+C.$$

Définition 15. Soient $n\geq 1$ et $p\geq 1$ deux entiers.
- (i) Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle ***opposée de*** A, et on note $-A$, la matrice
$$-A = (-a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$
- (ii) Soient A et B deux matrices de taille (n,p). On note alors:
$$A-B = A+(-B).$$

Exemple 16. $-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -3\end{pmatrix}$, et

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Proposition 17. $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A-A = 0_{n,p}$.

Démonstration. À noter. □

3. Multiplication par un réel

Définition 18. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On appelle produit de A par λ la matrice notée $\lambda \cdot A$ donnée par :

$$\lambda \cdot A = (\lambda \times a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Remarque. Le produit d'une matrice A par un réel λ est donc la matrice de même taille que A obtenue en multipliant chacun de ses coefficients par λ.

Exemple 19. Par exemple, $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 20 & 40 \\ 12 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, et pour tous réels $\lambda, a, b, \ldots, f$:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \\ \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}.$$

Remarque. On se permet de noter $\lambda \cdot A = \lambda A$, omettant ainsi le point médian. Par contre :
- On n'utilisera pas le symbole de multiplication $\times$ entre un réel et une matrice.
- **On respectera l'ordre de la définition** : le réel est à gauche, et la matrice à droite (ne pas écrire, avec ces notations, $A\lambda$ mais λA).

Proposition 20. *Soit* $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
(i) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \times \mu) \cdot A.$
(ii) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), 1 \cdot A = A$ *et* $(-1) \cdot A = -A.$
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2, \lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ *(Distributivité de $\cdot$ sur $+$.).*
(iv) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), (\lambda+\mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A.$

Démonstration. À noter. $\square$

4. Produit matriciel

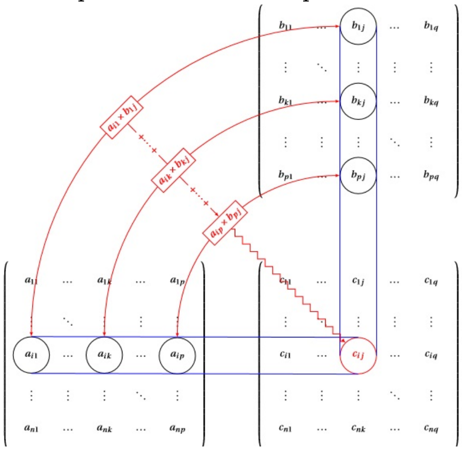
Il faut être bien plus attentif pour le produit matriciel.

Définition 21. Soit n, p, q des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
On appelle produit de A et B la matrice notée $A \times B = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque. Beaucoup de choses à remarquer sur cette définition.
- Pour que le produit $A \times B$ de deux matrices A et B soit défini, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
- Dans ce cas, $A \times B$ a le même nombre de lignes que A, et le même nombre de colonnes que B. Tout cela sera plus simple en comprenant comment "poser" le produit matriciel.
- Vous pouvez retenir : "le produit d'une matrice (n,p) par une matrice (p,q) donne une matrice (n,q)."

Remarque. Le produit matriciel se pose comme décrit par l'illustration suivante.



Exemple 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Alors, A est de taille $(2,2)$ et B est de taille $(3,2)$. Par conséquent,
- Le produit $A \times B$ n'est pas défini.
- Le produit $B \times A$ est bien défini.

Appliquons la définition pour calculer $B \times A$ (À noter.)

Remarque. Attention, comme on l'a vu dans l'exemple précédent, il se peut que $A \times B$ soit bien défini, sans que $B \times A$ le soit.
En particulier, l'ordre compte **beaucoup** dans un produit matriciel : on dit que **le produit matriciel n'est pas commutatif**.

Remarque. Même si $A \times B$ et $B \times A$ sont tous deux définis, ils ne sont pas toujours égaux.
Par exemple, posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors,

$$A \times B =$$

et

$$B \times A =$$

On remarque : $A \times B \neq B \times A$.

Remarque. Regardons ce qu'est le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. Alors le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

est bien défini, et son résultat est la matrice $(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \end{pmatrix}.$$

Remarque. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices telles que le produit $A \times B$ est bien défini. Alors $A \times B$ est une matrice de taille (n,q). Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, le coefficient d' indice (i,j) du produit $A \times B$ est le réel formant la matrice $(1,1)$ obtenue par le produit

$$L_i \times C_j$$

de la i ième ligne L_i de A par la j ième colonne C_j de B (revoir l'illustration précédente).

Remarque. On omet souvent de noter le symbole $\times$ de multiplication, notant alors plus simplement

$$A \times B = AB.$$

5. Propriétés du produit matriciel

Voici les propriétés calculatoires à connaitre.

Proposition 23. *Soient n, p, q et r des entiers naturels non nuls.*

(i) $\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$,

$$(AB)C = A(BC).$$

(ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B).$$

(iii) $\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$,

$$(A+B)C = AC + BC,$$

et
$\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$,

$$A(B+C) = AB + AC.$$

(iv) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$I_n A = A I_p = A.$$

(v) $\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$,

$$0_{n,p} A = 0_{n,q} \text{ et } A 0_{q,r} = 0_{p,r}.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. **Attention**, le produit matriciel n'étant pas commutatif (on ne peut pas affirmer a priori que $AB = BA$), beaucoup de règles de calcul classiques sont fausses sur les matrices.
Par exemple, en utilisant les règles de la proposition précédente, si toutes les opérations sont bien définies :

$$(A+B)^2 := (A+B)(A+B) \overset{(iii)}{=} (A+B)A+(A+B)B \overset{(iii)}{=} A\times A+BA+AB+B\times B = A^2+AB+BA+B^2.$$

Mais comme AB et BA ne sont pas, à priori, égales, **on ne peut pas conclure** que

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Remarque. Dans la remarque précédente, on est resté vague : "si toutes les opérations sont bien définies...". Plus précisément, on peut voir que ces opérations sont bien définies si et seulement si A et B sont des matrices carrées de même taille. Cela explique pourquoi, en partie II, on s'intéresse davantage aux matrices carrées (on peut enchainer des opérations sur ces matrices).

La proposition suivante est importante, car sa méconnaissance mène à de nombreuses fautes de calcul.

Proposition 24. *La règle du produit nul est fausse pour le produit matriciel : il existe des matrices non nulles A et B telles que*

$$AB = 0$$

.

Démonstration. À noter. □

Remarque. En particulier, on ne peut pas simplifier une matrice dans une inégalité de produit : il existe des matrices non nulles A, B et C telles que

$$AB = AC \quad \text{et} \quad B \neq C$$

6. Transposée d'une matrice

Définition 25. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle ***transposée de*** A, et on note ${}^tA$, la matrice de taille (p, n) donnée par :

$${}^tA = (a_{j,i})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}.$$

Exemple 26. La définition décrit ce processus, où "le rôle des lignes et des colonnes est échangé" :

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$${}^t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

Remarque. On trouve aussi des fois la notation : ${}^tA = A^T$ (n'adopter cette dernière que si le sujet utilise cette notation, car elle est trompeuse : elle pourrait désigner une puissance de matrice).

Proposition 27. *Soit* $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$.
(i) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), {}^t({}^tA) = A$.
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), {}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA$.
(iii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
(iv) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), {}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

Démonstration. À noter. □

II. Matrices carrées

Remarque. Si A et B sont des matrices carrées de même taille n, alors $A+B$ et AB sont bien définies, et sont des matrices carrées de taille n. Par conséquent, l'enchainement des opérations est permis entre des matrices carrées de même taille, et on dispose donc de plus de notions liées au calcul matriciel.

Proposition 28. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Alors, $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A+B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Trivial en revenant à la définition. □

1. Puissances d'une matrice carrée

Le calcul de puissances de matrices est très utilisé dans la résolution de nombreux problèmes (suites, probabilités, systèmes linéaires...).

Définition 29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle ***puissance k-ième*** de la matrice A la matrice notée A^k donnée par :

$$A^k = A \times A \times \ldots \times A$$

où le produit comporte k facteurs A. On pose aussi $A^0 = I_n$.

Remarque. On dit que 1 est l'élément neutre pour le produit des réels car $\forall x \in \mathbb{R}, 1x = x \times 1 = x$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1.$$

De même, I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel entre matrices carrées de taille n :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), I_n A = A I_n = A$$

et par convention, $A^0 = I_n$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 30. À noter : calculons $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$.

Proposition 31. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, A^k A^l = A^{k+l}.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Attention aux formules fausses. Par exemple, si A et B sont deux matrices carrées de même taille,

$$(AB)^n = (AB)(AB)(AB)\ldots(AB)$$

(où le produit comporte n facteurs) mais **on ne peut pas conclure que** $(AB)^n = A^n B^n$ car le produit matriciel n'est pas commutatif.

Proposition 32. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N}$:

$$({}^tA)^k = {}^t(A^k).$$

Démonstration. À noter. □

2. Commutation de matrices

Le calcul avec des matrices qui commutent est enrichi de beaucoup de formules classiques pour les réels.

Définition 33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B ***commutent*** si :

$$AB = BA.$$

Remarque. La définition n'a de sens que si A et B sont carrées de même taille (pourquoi ? Que se passe-t-il sinon ?).

Exemple 34. À noter :

(*i*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, I_n et 0_n commutent avec toute matrice carrée de taille n.

(*ii*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent-t-elles?

(*iii*) Même question pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici un exercice classique :

Exercice 35. Quelles sont les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Proposition 36. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λI_n commute avec toute matrice carrée de taille n.

(ii) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Si A et B commutent, alors A^k et B^l commutent pour tous entiers naturels k et l.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Une matrice de la forme λI_n (où $\lambda \in \mathbb{R}$) est appelée une matrice d'homothétie. On utilisera souvent que ces matrices commutent avec toute matrice carrée (de même taille).

Voici les propriétés calculatoires supplémentaires dans le cas de matrices qui commutent.

Proposition 37. *Soient A, B deux matrices carrées de même taille qui commutent. Alors :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, (AB)^n = A^n B^n$.

(ii) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

(iii) Formule du binôme de Newton : Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. La formule du binôme de Newton est donc vraie pour les matrices, **mais uniquement si celles-ci commutent**.

Voici un exercice très classique, qui est une méthode à savoir faire en autonomie en 2e année.

Exemple 38. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

(i) Calculer B, B^2 et B^3.

(ii) En déduire B^k pour tout entier naturel k.

(iii) En déduire un calcul de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On écrira $A^n = (B + I_3)^n$.

Remarque. La méthode précédente marche car A est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux.

3. Matrices triangulaires et diagonales

Définition 39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) On dit que A est ***triangulaire supérieure*** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, j < i \implies a_{i,j} = 0.$$

(ii) On dit que A est ***triangulaire inférieure*** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j \implies a_{i,j} = 0.$$

(iii) On dit que A est une ***matrice diagonale*** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies a_{i,j} = 0.$$

Exemple 40. Ces définitions signifient... (à noter).

Exemple 41. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure. Sa transposée $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonale. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est ni triangulaire supérieure, ni triangulaire inférieure, ni diagonale.

Remarque. On note souvent $T_n^{\sup}(\mathbb{R})$ (resp. $T_n^{\inf}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de taille n.

Proposition 42. *Soient A et B deux matrices carrées de même taille.*
Si A et B sont triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures, resp. diagonales), alors $A + B$ et $A \times B$ sont triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures, resp. diagonales).

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. Important : Si A et B sont triangulaires supérieures (de même taille), alors les coefficients diagonaux de $A + B$ et $A \times B$ s'obtiennent directement à partir de ceux de A et B. (À noter). La même chose est vraie pour les matrices triangulaires inférieures et diagonales.

Proposition 43. *Si A est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale), alors il en est de même de A^n pour tout entier naturel n.*

Démonstration. À noter. $\square$

Proposition 44. *Si A est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure), alors ${}^tA$ est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).*

Démonstration. À noter. □

4. Matrices carrées et transposition

Juste un peu de vocabulaire ici :

Définition 45. (*i*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est ***symétrique*** si ${}^tA = A$. On dit que A est ***antisymétrique*** si ${}^tA = -A$.

(*ii*) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n.

Exemple 46. Donnons des matrice symétriques et antisymétriques.

Remarque. Toute matrice antisymétrique a ses coefficients diagonaux nuls.

III. Matrices carrées inversibles

1. Définition

Définition 47. Soit $\in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est ***inversible*** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

On démontre immédiatement :

Proposition 48. (et définition.) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

*Cette matrice est appelée **l'inverse de** A, et notée A^{-1}.*

Démonstration. À noter. □

On admettra la proposition suivante, démontrée en 2e année.

Proposition 49. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il est équivalent de dire :*

(i) A est inversible, et $A^{-1} = B$,

(ii) $AB = I_n$ (on dit que B est inverse à droite de A),

(iii) $BA = I_n$ (on dit que B est inverse à gauche de A).

Remarque. Autrement dit, pour montrer qu'une matrice carrée A est inversible, il suffit de trouver une matrice B de même taille n telle que $AB = I_n$, ou bien $BA = I_n$. Dans ce cas, $B = A^{-1}$. Cette proposition réduit les vérifications à faire, par rapport à la définition.

Exemple 50. Étudions l'inversibilité de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exemple 51. La matrice O_n est elle inversible, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

Exemple 52. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Que dire de l'inversibilité de λI_n ?

Exemple 53. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB. Qu'en déduire?

Proposition 54. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi, et*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Démonstration. À noter. □

2. Propriétés de l'inverse

Proposition 55. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

(i) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(ii) A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible, et dans ce cas :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

(iii) Soit $m \geq 1$. A est inversible si et seulement si A^m est inversible, et dans ce cas:

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 56. Soient A et P deux matrices carrées de taille n inversibles. Montrer que $P^{-1}AP$ est inversible, et donner une expression de son inverse.

Voici quelques règles de calcul propres à l'inversibilité.

Proposition 57. *Soit A une matrice carrée de taille n.*

(i) Si A est inversible, alors A est simplifiable à gauche et à droite :

$$\forall p \geq 1, \forall (B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2, AB = AC \implies B = C.$$

$$\forall p \geq 1, \forall (B,C) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})^2, BA = CA \implies B = C.$$

(ii) Plus généralement, si A est inversible, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$:

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y.$$

Démonstration. À noter. □

Le résultat de cet exercice n'est pas au programme, mais il est si classique qu'il faut l'avoir bien compris.

Exercice 58. Soient A et B deux matrices carrées de taille n, non nulles, telles que $AB = 0_n$ (on dit que A et B sont diviseurs de 0_n). Montrer que A et B ne sont pas inversibles. On procédera par l'absurde.

3. Deux cas particuliers simples

a) Cas des matrices diagonales

Proposition 59. *Une matrice diagonale* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux* $\lambda_1, \dots \lambda_n$ *sont non nuls. Dans ce cas, son inverse est la matrice diagonale:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \vdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Démonstration. À noter. ☐

Exemple 60. À noter.

b) Cas des matrices de taille $(2, 2)$

Définition 61. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2.
On appelle ***determinant de*** A le réel noté $\det(A)$ donné par :

$$\det(A) = ad - bc.$$

Proposition 62. *Soit* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*. Alors, A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. À noter. ☐

Remarque. La démonstration donne, dans ce cas, l'inverse de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

mais (programme officiel...) la formule obtenue pour A^{-1} n'est pas au programme. La proposition, par contre, est bien au programme (vous pouvez utiliser le déterminant pour caractériser l'inversibilité d'une matrice $(2, 2)$). Sur une copie, pour utiliser cette formule, vous devez donc à chaque fois la redémontrer en montrant

$$A \times (\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}) = I_2.$$

Exemple 63. A quelle condition sur le réel a la matrice $\begin{pmatrix} a & 2 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

4. Utilisation d'un polynôme

Remarque. Attention, pour ne pas entrer dans des considérations trop théoriques, la définition ci-dessous est une NOTATION.

Définition 64. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme réel, et A une matrice carrée. On note alors :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k.$$

Exemple 65. Si $P(X) = X^2 + 1$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $P(A) = \dots$ (À noter.)

Remarque. Méthode : Soit A une matrice carrée de taille n et P un polynôme réel. On suppose le coefficient constant de P non nul. Alors, si $P(A) = 0_n$, on peut montrer que A est inversible et utiliser cette relation pour exprimer A^{-1} en fonction de A.

Exemple 66. À noter.

IV. Systèmes linéaires, matrices et inversibilité

1. Une correspondance entre systèmes linéaires et matrices

Remarque. La produit d'une matrice par une matrice colonne est une matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$$

Remarque. Dans l'égalité ci-dessus, dans le membre de droite, on retrouve des expressions de la forme des lignes d'un système linéaire. C'est une des manières d'expliquer pourquoi le produit matriciel a été défini de la sorte !

Définition 67. Soit

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

un système linéaire à n équations et p inconnues. On appelle ***matrice associée*** au système linéaire (S) la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Définition 68. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une matrice réelle. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons (E) l'équation matricielle :

$$AX = Y$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
On appelle ***système linéaire associé à*** (E) le système linéaire :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

On dit aussi que l'équation $AX = B$ est la forme matricielle du système linéaire (S).

Remarque. Dans l'énoncé ci-dessus, résoudre l'équation matricielle (E) c'est déterminer l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = Y$.

Proposition 69. *Soit (S) un système linéaire à n équations et p inconnues, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice associée à (S). Soit $(y_1, \ldots y_n)$ le second membre de (S).*
Alors, pour tous réels $x_1, \ldots, x_p$, il est équivalent de dire :

(i) $(x_1, \ldots, x_p)$ *est solution de* (S), *et*

(ii) $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Démonstration. À noter. □

Exemple 70. À noter.

2. Systèmes de Cramer et inversibilité

a) Rappels sur les systèmes de Cramer

Soit (S) un système linéaire ***carré***. On dit que (S) est de Cramer s'il admet une unique solution. Pour savoir si (S) est de Cramer :

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss pour obtenir un système échelonné équivalent,
- (S) est alors de Cramer si et seulement si les coefficients diagonaux du système obtenu sont tous non nuls.
- On remarque que la mise en œuvre de l'algorithme du pivot de Gauss (les opérations effectuées et la forme échelonnée obtenue à gauche des égalités) ne dépend pas du second membre du système considéré.

Ces idées démontrent la proposition suivante :

Proposition 71. *Soit (S) un système linéaire carré. Alors, le caractère "de Cramer" de (S) est indépendant de son second membre. En particulier, (S) est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est de Cramer.*

On reformule cette proposition avec une écriture matricielle.

Proposition 72. *Soit A une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) Le système linéaire associé à l'équation matricielle $AX = B$ est de Cramer, et

(ii) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire associé à l'équation matricielle $AX = Y$ est de Cramer.

b) Systèmes de Cramer et inversibilité

Théorème 73. *Soit (S) un système linéaire carré de matrice associée A. Alors, (S) est de Cramer si et seulement si A est inversible.*

Démonstration. À noter. □

Corollaire :

Proposition 74. *Soit (S) un système linéaire carré de taille n, de matrice associée A, de forme matricielle*

$$AX = B.$$

Si (S) est de Cramer, alors A est inversible et l'unique solution $(x_1, \dots, x_n)$ de (S) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B.$$

Autrement dit, la résolution de (S) est liée au calcul de l'inverse de A.

c) Méthode de calcul d'un éventuel inverse

Méthode : Pour déterminer si une matrice carré $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et, le cas échéant, calculer A^{-1} :

- On considère un vecteur colonne indéterminé $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- On pose le système linéaire carré (S) associé à l'équation matricielle $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- On applique l'algorithme du pivot de Gauss. Première déduction : A est inversible si et seulement si (S) est de Cramer.
- Si A est inversible, on termine la résolution de (S). L'unique solution de (S) est obtenue en fonction de $y_1, \dots, y_n$.
- La matrice A^{-1} est alors l'unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la solution trouvée soit :

$$B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 75. Montrons que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et calculons A^{-1}.

Remarque. Si la forme échelonnée ne donne pas un système de Cramer, on peut immédiatement conclure que A n'est pas inversible, d'où l'intérêt de marquer l'étape.

Remarque. Si (S) est de Cramer, on lit directement l'inverse de A sur les coefficients de y_i donnant la solution de (S) à condition d'avoir bien écrit les y_i en colonne et dans l'ordre.

d) Le cas particulier des matrices triangulaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Pour tous réels $y_1, \dots, y_n$, le système linéaire associé à l'équation matricielle

$$AX = Y$$

est déjà échelonné, ses coefficients diagonaux sont ceux de A.

Ainsi :

Proposition 76. *Une matrice triangulaire A de la forme* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \star & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, A^{-1} est triangulaire supérieure et de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & \star & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Démonstration. Esquisse à noter. $\square$

Proposition 77. *La même proposition est vraie avec les matrices triangulaires inférieures : une matrice carré de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & \star & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous non nuls, et son inverse est alors de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & 0 & \\ & \star & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Si A est triangulaire inférieur, alors ${}^tA$ est triangulaire supérieur et de même coefficients diagonaux, notés $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Par théorème, A est inversible ssi ${}^tA$ est inversible, et dans ce cas :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

En appliquant la transposition à cette égalité, il vient dans ce cas :

$$A^{-1} = {}^t(({}^tA)^{-1}).$$

Par la proposition précédente, ${}^tA$ est inversible ssi les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous non nuls, et dans ce ce cas les coefficients diagonaux de $({}^tA)^{-1}$ sont $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$, et $({}^tA)^{-1}$ est triangulaire supérieure.

On a donc l'équivalence :

A est inversible
si et seulement si ${}^tA$ est inversible,
si et seulement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous non nuls.

Dans ce cas, son inverse étant la transposée de $({}^tA)^{-1}$, A^{-1} est triangulaire inférieure (comme transposée d'une matrice triangulaire supérieure) et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ (la transposition en change pas les coefficients diagonaux). $\square$