Lycée Hoche
ECG1A

2025-2026
Mathématiques

Devoir maison n°3

À rendre le vendredi 23 janvier 2026

Exercice 1

Montrer que les suites u et v données par $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}) - 2\sqrt{n}$ et $v_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}) - 2\sqrt{n+1}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) convergent vers une limite commune.

Exercice 2

Considérons la suite donnée par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$. Déterminer le sens de variation puis la limite de la suite u.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (1+X)^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Développer P_n à l'aide des coefficients binomiaux.
2. Calculer P_n' de deux manières différentes. En déduire la formule du cours :
$$\forall k \in [\![0, n]\!], k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
3. Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer :
$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} X^j\right) = \sum_{p=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\right) X^p$$
On rappelle que par définition, si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.
4. Calculer $P_n P_m$ de deux manières différentes. En déduire l'égalité:
$$\forall k \in [\![0, n+m]\!], \binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$
5. Démontrer l'égalité de la question précédente à l'aide d'un double décompte (c'est à dire, par un dénombrement, comme pour la preuve de la formule du triangle de Pascal).

Exercice 4

On dispose de 5 pièces de monnaie. Une pièce contient deux côtés “face”, les 4 autres sont des pièces classiques équilibrées.

On choisit au hasard une de ces pièces, puis on la lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir “face” au premier lancer?
2. On a obtenu “face”. Quelle est la probabilité d'obtenir la pièce truquée?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir n fois “face” aux n lancers effectués?
4. On a obtenu “face” aux n lancers. Quelle est la probabilité p_n d'avoir tiré la pièce truquée? Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de redémontrer la formule de Vandermonde :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n+m]\!], \binom{n+m}{k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{m}{k-p}$$

On fixe n, m des entiers positifs et $k \in [\![0, n+m]\!]$. On fixe un ensemble E à $n+m$ éléments, et A une partie de E de cardinal n et on pose $B = E \setminus A$. On note :

$$\mathcal{P}_k(T) = \{U \in \mathcal{P}(T) | \mathrm{Card}(U) = k\} \text{ pour tout ensemble } T,$$

$$\forall p \in [\![0, k]\!], \mathcal{A}_{k,p}(E) = \{U \in \mathcal{P}_k(E) | \mathrm{Card}(U \cap A) = p\}$$

1. Donner les cardinaux de $\mathcal{P}_k(E)$, $\mathcal{P}_p(A)$ et $\mathcal{P}_{k-p}(B)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}_k(E) = \bigsqcup_{p=0}^{k} \mathcal{A}_{k,p}(E)$. En déduire le cardinal de $\mathcal{P}_k(E)$ en fonction des cardinaux des $\mathcal{A}_{k,p}(E)$, pour $0 \leq p \leq k$.
3. Soit $p \in [\![0, k]\!]$. Montrer que l'application

$$\phi_p : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{A}_{k,p}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}_p(A) \times \mathcal{P}_{k-p}(B) \\ U & \longmapsto & (U \cap A, U \cap B) \end{array} \right.$$

   est bien définie et bijective.
4. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_{k,p}(E)$.
5. Démontrer la formule de Vandermonde.

— *fin* —